Construcción de Conjuntos $B_2[2]$ Finitos

Gladis J. Escobar Carlos A. Trujillo S.
Oscar H. Zemanate

Resumen

Un conjunto de enteros positivos $\mathcal{A}$ se llama un conjunto $B_2[g]$ si, para todo entero positivo s, la ecuación

$$a + a' = s, \qquad a,\ a' \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad a \leq a'$$

tiene a lo sumo g soluciones. Si $F_{2,g}(N)$ denota el máximo número de enteros que pueden seleccionarse de $\{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ para formar un conjunto $B_2[g]$, se conoce que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_{2,1}(N)}{\sqrt{N}} = 1.$$

Cuando $g \geq 2$ no se conoce la existencia de

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_{2,g}(N)}{\sqrt{N}}.$$

En este artículo se demuestra que

$$\frac{4}{\sqrt{7}} \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{F_{2,2}(N)}{\sqrt{N}}$$

y además se prueba que no es posible mejorar esta cota si se recurre a los métodos de construcción conocidos.

1. Introducción

Sean $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y $\mathcal{A}$ un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Para cada $s \in \mathbb{N}$, mediante $\sigma_{\mathcal{A}}(s)$ se denota el número de soluciones de la ecuación

$$s = a + a', \tag{1}$$

sujeta a las restricciones

$$a, a' \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad a \leq a'. \tag{2}$$

Es decir

$$\sigma_{\mathcal{A}}(s) := |\{(a, a') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} : s = a + a', \quad a \leq a'\}|,$$

donde $|X|$ representa el número de elementos del conjunto finito X y $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ corresponde al producto cartesiano de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A}$. También, $S(\mathcal{A})$ representa el conjunto de sumas de la forma (1) sujetas a las restricciones (2):

$$S(\mathcal{A}) := \{s \in \mathbb{N} : s = a + a', \quad \text{con} \quad a, a' \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad a \leq a'\}.$$

Sea $g \in \mathbb{N}$. Se dice que $\mathcal{A}$ es un conjunto $B_2[g]$, o que pertenece a la clase $B_2[g]$, si

$$\sigma_{\mathcal{A}}(s) \leq g, \qquad \text{para todo } s.$$

Si mediante $[1, N]$ se representa el conjunto de los primeros N enteros positivos $\{1, 2, 3, \cdots, N\}$, el problema general a considerar consiste en determinar el máximo número de enteros positivos que pueden seleccionarse de los primeros N, de tal forma que constituyan un conjunto en la clase $B_2[g]$. Es decir, se trata de estudiar el comportamiento asintótico de la función

$$F_{2,g}(N) := \text{máx}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subset [1, N], \quad \mathcal{A} \in B_2[g]\}.$$

Los conjuntos en la clase $B_2[1]$ se llaman *conjuntos de Sidon* o *conjuntos* B_2. En este caso, se utiliza la notación $F_2(N)$ para referirse a la función $F_{2,1}(N)$. Después de los trabajos de P. Erdös y P. Turán [2], R. C. Bose y S. Chowla [1], hoy se conoce el comportamiento asintótico de la función $F_2(N)$.

Teorema 1 (Erdös y Turán). *La función* $F_2(N)$ *satisface*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_2(N)}{\sqrt{N}} = 1. \tag{3}$$

Sin embargo, cuando $g \geq 2$ el siguiente problema continúa sin resolverse.

Problema. Decidir si el límite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_{2,g}(N)}{\sqrt{N}}$$

existe. Si existe, determinar su valor. En particular, estimar $F_{2,2}(N)$.

En este artículo se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2. *La función* $F_{2,2}(N)$ *satisface*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{F_{2,2}(N)}{\sqrt{N}} \geq \frac{4}{\sqrt{7}} \geq 1{,}51 > \frac{3}{2}.$$

2. Resultados preliminares

En el interés de obtener conjuntos en la clase $B_2[2]$ tan densos como sea posible, los mejores resultados conocidos hasta el momento son los siguientes.

En 1996, M. Kolountzakis [4] y también Erdös y Freud [2], obtuvieron la cota inferior

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{F_{2,2}(N)}{\sqrt{N}}.$$

Kolountzakis considera la unión de dos conjuntos de Sidon adecuadamente escogidos. Tal construcción permite afirmar que de los primeros N enteros positivos es posible seleccionar $\sqrt{2N}$ elementos de tal forma que constituyan un conjunto en la clase $B_2[2]$.

Por su parte C. Trujillo [6], en 1999, modifica la construcción anterior, permitiendo la unión de tres conjuntos de Sidon especiales. Su construcción implica que

$$\sqrt{2} < \frac{3}{2} \leq \liminf_{N\to\infty} \frac{F_2(2,N)}{\sqrt{N}}.$$

Trujillo introduce la siguiente definición.

Definición 3. *Sea m un entero positivo. Un conjunto $\mathcal{A} \subseteq [1,m]$ es un* ***conjunto de Sidon módulo*** *m, si todas las sumas de la forma*

$$a + a'; \quad \textit{con} \quad a, a' \in \mathcal{A} \quad \textit{y} \quad a \leq a',$$

son incongruentes módulo m. Es decir, si para todo x, y, u, $v \in \mathcal{A}$

$$[x + y \equiv u + v \pmod{m}] \Rightarrow [(u,v) = (x,y) \quad \textit{o} \quad (u,v) = (y,x)].$$

Dados dos conjuntos de enteros $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y un entero x, se hará uso de la siguiente notación

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} + \mathcal{B} &:= \{a + b : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}, \\
\mathcal{A} + x &:= \mathcal{A} + \{x\} = \{a + x : a \in \mathcal{A}\}, \\
\sigma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(s) &:= |\{(a,b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : s = a + b\}|.
\end{aligned}$$

La proposición fundamental en la construcción de Trujillo es la siguiente.

Proposición 4. *Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m y*

$$\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}, \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_k,$$

es un conjunto de Sidon, entonces el conjunto

$$\mathcal{B} := \bigcup_{t\in\mathcal{T}} (\mathcal{A} + tm)$$

pertenece a la clase $B_2[2]$.

Demostración. Si para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, se define el conjunto

$$\mathcal{A}_i := \mathcal{A} + t_i m,$$

para probar la proposición es suficiente demostrar las siguientes afirmaciones:

1. $\sigma_{\mathcal{A}_i}(s) \leq 1$, para todo $s \in \mathbb{N}$.
2. $\sigma_{\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_j}(s) \leq 2$, $1 \leq i < j \leq k$, para todo $s \in \mathbb{N}$.

3. Los conjuntos $S(\mathcal{A}_i)$, $1 \le i \le k$; $(\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_l)$, $1 \le j < l \le k$, son disjuntos por pares.

La primera afirmación es inmediata puesto que cada $\mathcal{A}_i$ es un conjunto de Sidon.

Para la segunda afirmación, suponga que existen $a_i, a_i' \in \mathcal{A}_i$ y $a_j, a_j' \in \mathcal{A}_j$ tales que

$$a_i + a_j = a_i' + a_j',$$

entonces por definición de $\mathcal{A}_i$ y $\mathcal{A}_j$ se sigue que

$$(a + t_i m) + (a' + t_j m) = (a'' + t_i m) + (a''' + t_j m),$$

para algunos $a,\ a',\ a'',\ a''' \in \mathcal{A}$. Luego

$$a + a' \equiv a'' + a''' \pmod{m}.$$

Como $\mathcal{A}$ es un conjunto de Sidon módulo m, se tiene que

$$(a = a'' \quad \text{y} \quad a' = a''') \quad \text{o bien} \quad (a = a''' \quad \text{y} \quad a' = a'').$$

De ($a = a''$ y $a' = a'''$), se sigue que $a_i = a_i'$, $a_j = a_j'$, así que la representación es única. Mientras que de ($a = a'''$ y $a' = a''$) se siguen, a lo sumo, representaciones dobles

$$(a + t_i m) + (a' + t_j m) \quad \text{y} \quad (a' + t_i m) + (a + t_j m),$$

entonces no es posible tener una tercera representación.

La tercera afirmación se demuestra si se prueban las siguientes relaciones:

$$S(\mathcal{A}_i) \cap S(\mathcal{A}_j) = \emptyset, \qquad 1 \le i < j \le k, \tag{4}$$

$$S(\mathcal{A}_i) \cap (\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_l) = \emptyset, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, 1 \le j < l \le k, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}(\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_l) \cap (\mathcal{A}_r + \mathcal{A}_s) = \emptyset, \\ 1 \le j < l \le k, \quad 1 \le r < s \le k, \quad j \ne r, \quad l \ne s.\end{gathered} \tag{6}$$

Para probar (4) suponga que existen $a_i, a_i', a_j, a_j' \in \mathcal{A}$ tales que

$$(a_i + t_i m) + (a_i' + t_i m) = (a_j + t_j m) + \left(a_j' + t_j m\right), \tag{7}$$

entonces

$$a_i + a_i' \equiv a_j + a_j' \pmod{m}.$$

De donde, como antes, se sigue que

$$a_i + a_i' = a_j + a_j',$$

y de (7) se tiene $t_i = t_j$, que no es el caso porque $i < j$.

Para probar (5) suponga que existen $a_i, a_i', a_j, a_l \in \mathcal{A}$ tales que

$$(a_i + t_i m) + (a_i' + t_i m) = (a_j + t_j m) + (a_l + t_l m). \tag{8}$$

Entonces
$$a_i + a_i' \equiv a_j + a_l \pmod{m},$$
y de nuevo
$$a_i + a_i' = a_j + a_l,$$
y de (8) se tiene $2t_i = t_j + t_l$. Esta igualdad no es posible porque $\mathcal{T}$ es un conjunto de Sidon.

Finalmente, para probar (6) suponga que existen a_j, a_l, a_r, $a_s \in \mathcal{A}$ tales que
$$(a_j + t_j m) + (a_l + t_l m) = (a_r + t_r m) + (a_s + t_s m)\,. \tag{9}$$
Entonces
$$a_j + a_l \equiv a_r + a_s \pmod{m},$$
y de nuevo
$$a_j + a_l = a_r + a_s,$$
y de (9) se tiene $t_j + t_l = t_r + t_s$. Esta igualdad no es posible porque $\mathcal{T}$ es un conjunto de Sidon. Esto finaliza la prueba. $\square$

3. Demostración del Teorema 1

Antes de demostrar el teorema, se necesita el siguiente lema.

Lema 5. *Para todo primo p, existe un conjunto $\mathcal{B}$ en la clase $B_2[2]$ tal que*
$$\mathcal{B} \subseteq \left[1, 7p^2 - 7\right] \quad y \quad |\mathcal{B}| = 4p.$$
En particular
$$F_{2,2}\left(7p^2\right) \geq 4p,$$
para todo primo p.

Demostración. La construcción de Bose [1], afirma que para todo primo p existe un conjunto de Sidon módulo $m = p^2 - 1$, con p elementos, sea $\mathcal{A} \subset \left[1, p^2 - 1\right]$ dicho conjunto. De la proposición anterior y el hecho que $\mathcal{T} = \{0, 1, 4, 6\}$ es un conjunto de Sidon, se tiene que
$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{A} + m) \cup (\mathcal{A} + 4m) \cup (\mathcal{A} + 6m) \subseteq \left[1, 7p^2 - 7\right],$$
es un conjunto $B_2[2]$, y claramente
$$|\mathcal{B}| = 4\,|\mathcal{A}| = 4p.$$
$\square$

Prueba del Teorema 1. Sean p y p' primos consecutivos tales que
$$\sqrt{7}p \leq \sqrt{N} \leq \sqrt{7}p'.$$
Elevando al cuadrado en la desigualdad anterior
$$7p^2 \leq N \leq 7(p')^2,$$

como $F_{2,2}(N)$ es no decreciente, se tiene que

$$F_{2,2}(N) \geq F_{2,2}\left(7p^2\right) \geq 4p.$$

Si en la desigualdad anterior se divide entre $\sqrt{N}$, se obtiene

$$\frac{F_{2,2}(N)}{\sqrt{N}} \geq \frac{F_{2,2}\left(7p^2\right)}{\sqrt{7}p'} \geq \frac{4p}{\sqrt{7}p'}.$$

Como el cociente entre primos consecutivos tiende a uno, el teorema queda demostrado. $\square$

Sea $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ un conjunto de enteros no negativos, con

$$0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_k.$$

El siguiente lema implica que no es posible mejorar la constante $4/\sqrt{7}$ en el Teorema 1, si se recurre a construcciones similares.

Lema 6. *Si T es un conjunto de Sidon, entonces*

$$t_{k-i} \geq t_0 + \binom{|T|-i}{2}, \qquad \textit{para todo } i = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

En particular

$$t_k \geq \binom{|T|}{2} = \binom{k+1}{2}.$$

Demostración. Como T es un conjunto de Sidon, todas las diferencias de la forma $t_j - t_i$, con $i < j$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, son distintas. Si t_{k-i} se expresa en la forma

$$t_{k-i} = t_0 + (t_1 - t_0) + \ldots + (t_{k-i} - t_{k-i-1}), \qquad (10)$$

entonces como todas las diferencias en (10) son distintas, es claro que

$$\begin{aligned} t_{k-i} &= t_0 + (t_1 - t_0) + \ldots + (t_{k-i} - t_{k-i-1}) \\ &\geq t_0 + (1 + 2 + \ldots + (k-i)) \\ &= t_0 + \frac{(k-i)(k-i+1)}{2} = t_0 + \binom{k+1-i}{2} \\ &= t_0 + \binom{|T|-i}{2}. \end{aligned} \qquad \square$$

Agradecimientos. Los autores agradecen a COLCIENCIAS y a la Universidad del Cauca por la financiación del Proyecto 1103-05-11450.

Referencias

[1] Bose, R.C. y Chowla, S. *Theorems in the additive theory of numbers.* Comment. Math. Helvet. 37 (1962-63), 141-147.

[2] Erdös, P. y Turán, P. *On a problem of Sidon in additive number theory and some related problems.* J. London Math. Soc. (2) 16 (1941), 212-215.

[3] Halberstam, H., Roth, K. F. *Sequences*, Vol. I. Oxford University Press, New York, Londres, 1966.

[4] Kolountzakis, M. N. *The density of* $B_h[g]$ *sequences and the minimun of dense cosine sums.* Journal of Number Theory 56 (1996), 4-11.

[5] Sarkozy, A. y V. T. Sös. *On additive representation functions.* En: The mathematics of Paul Erdös I, Eds. R. L.Graham, J. Nesetril, Algorithms and Combinatorics 13, Springer-Verlag, New York (1996), 129-150.

[6] Trujillo, C. *Conjuntos* $B_2[2]$ *Finitos.* Ponencia presentada en el VII Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas, Medellín 23 al 27 de agosto de 1999.