Vol. XIII № 2 Diciembre (2005)
Matemáticas: 1–22

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

El método de las tangentes de Fermat

Sergio Alberto Alarcón Carlos Mario Suescún
Andrés de la Torre

Recibido Feb, 24, 2005 Aceptado Ago. 12, 2005

Abstract

The purpose of the paper is to analyze the general method developed by Fermat for determining maximum and minimum values and the application he made of this method to the general problem of the tangent to a curve at a given point. The use Fermat made of the pseudo-equality techniques and the anachronistic interpretations of Fermat's method of maxima and minima as the notion of a derivative which is made equal to zero are discussed in detail. The way Fermat used his method of tangents in the particular cases of the folium of Descartes and the cycloid are also expounded.

Keywords: Maximum, minimum, limit, derivative, tangent, folium of Descartes, cycloid, pseudo-equality.

AMSC(2000): Primary: 01A45, Secondary: 00A35, 97D99.

Resumen

Se analiza el método inventado por Fermat para hallar máximos y mínimos y, en particular, el concepto de adigualdad. Se desvirtúan algunas interpretaciones anacrónicas que conectan dicho método con el cálculo de una derivada que se iguala a cero. Se estudia la aplicación del método, propuesta por Fermat, para determinar la tangente a una curva plana en un punto de la misma y se analiza, como caso particular, el de la tangente al folio de Descartes. Se estudia la extensión del método de Fermat al caso de la tangente a la cicloide.

Palabras y frases claves: Adigualdad, máximo, mínimo, tangente, límite, derivada.

1 Introducción

El problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto de ésta interesó profundamente a los matemáticos griegos de la Antigüedad, quienes concibieron inicialmente la tangente como una recta que toca a la curva sin cortarla, inspirándose para ello en sus observaciones sobre el círculo. Los miembros más eminentes de la primera escuela de Alejandría – Euclides, Apolonio y Arquímedes – se ocuparon del problema. A finales del siglo IV a.C., Euclides presentó en los *Elementos de Geometría* los resultados relativos a la tangente al círculo, entre los cuales destacamos los siguientes:

> "Definición III-2: Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta" ([4], p. 750).
>
> "Proposición III-16: La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del círculo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor" ([4], p. 760).

En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica como la recta trazada por el extremo de un diámetro paralelamente a las ordenadas a éste. Apolonio logró así extender a las cónicas la concepción de tangente que Euclides había establecido para el círculo. El texto pertinente de Apolonio, tomado de *Las Cónicas*, reza así:

> "Proposición I-17: La paralela por el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente cae fuera de la sección" ([1], p. 336).

Al finalizar la prueba de este teorema, Apolonio escribió: *":. luego la paralela por A a una recta trazada ordenadamente no caerá dentro, sino fuera de la sección y será tangente a ésta"*, donde A es el vértice de la sección.

Apolonio complementó su estudio de la tangente a una sección en el vértice de ésta con algunos resultados notables, entre los cuales destacamos el siguiente, por su semejanza con los que Euclides había establecido para el círculo en la Proposición III-16:

> "Proposición I-32: La paralela desde el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente es tangente a la sección y ninguna otra recta caerá entre la tangente y la sección" ([1], p. 342).

Había dificultades, sin embargo, para aplicar los métodos euclidianos a otra clase de figuras geométricas planas conocidas también por los griegos, como, por ejemplo, la espiral de Arquímedes. Este matemático del siglo III a.C. pudo encontrar la tangente a la curva, siguiendo posiblemente consideraciones de tipo cinemático, que le permitieron determinar la dirección instantánea del movimiento del punto mediante el cual se genera la curva.

Con la decadencia de la escuela de Alejandría los métodos de la geometría sintética de los griegos pasaron a un segundo plano, mientras se imponía la orientación intelectual de los musulmanes. A finales del siglo XVI los matemáticos europeos habían redescubierto la tradición geométrica griega, cuyo contacto con el álgebra desarrollada por el Islam terminó originando dos acontecimientos de primera magnitud en la historia de las matemáticas: (i) la invención del álgebra simbólica, por Vieta, en 1591; (ii) la geometría analítica, creada por Descartes y Fermat, independientemente uno de otro, en la tercera década del siglo XVII. Con el desarrollo de la geometría analítica se clarificó la relación entre las curvas y las ecuaciones, y el hecho de que toda ecuación en dos variables determinara una curva en el plano produjo una verdadera explosión de nuevas curvas, con algunas de las cuales resultaba inadecuado el concepto griego de tangente. La parábola cúbica, por ejemplo, que presentamos en la Figura 1, era una curva bien conocida de Fermat, quien se refiere a ella en una carta de 1636, en los términos siguientes:

> "...una figura como una parábola, de tal tipo que los cubos de las ordenadas están en proporción con los segmentos que ellas cortan en el diámetro. Esta figura es algo como una parábola y difiere de ésta solo en el hecho de que en una parábola tomamos la razón de los cuadrados mientras que en esta figura yo tomo la de los cubos. Esta es la razón por la cual M. de Beaugrand, a quien le presenté este problema, la llama una parábola cúbica". ([6], p. 611)

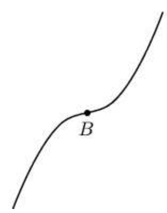

Figure 1: Parábola cúbica.

¿Cómo se determina la tangente en el punto B, donde la curva y el diámetro coinciden, si se concibe la tangente como una recta que toca, pero no corta, a la curva?

Todo ello llevó a que los matemáticos del siglo XVII, como Descartes, Fermat, Roberval, Barrow y Torriccelli, retomaran o criticaran los métodos de los antiguos griegos y se dieran a la tarea de desarrollarlos y aplicarlos para la obtención de la recta tangente a cualquier curva. Algunos de ellos razonaron de manera primordialmente geométrica, otros lo hicieron con una orientación algebraica, y otros introdujeron elementos cinemáticos en su razonamiento. Sus investigaciones abrieron el camino para la invención del cálculo, por Newton y Leibniz, en el último tercio del siglo XVII.

2 El método de máximos y mínimos de Fermat

Hacia el año 1636 circuló en Francia una memoria de Fermat titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* ("Método para investigar máximos y mínimos"), cuya importancia radica en que, además de ser el primer método general conocido para determinar máximos y mínimos, presentaba la idea de dar un incremento a cierta magnitud, la cual tomaba así el aspecto de una variable. Por su aporte al desarrollo del concepto de límite, analizaremos este texto y algunas interpretaciones anacrónicas que se le dan hoy, según las cuales en el *Methodus* subyace el cálculo de una derivada que se iguala a cero.

Transcribiremos a continuación parte del *Methodus*, respetando la secuencia del contenido, pero separándolo en párrafos para facilitar su estudio y análisis. Fermat se expresa con estas palabras:

> "Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

1. Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
2. Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.
3. Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a+e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos que pueden ser de cualquier grado.
4. Se "adigualarán", para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
5. Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.
6. Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
7. Se suprimirán a continuación todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias y se igualará lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada se igualarán, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.
8. La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original" ([8], p. 143 -144).

Fermat emplea el simbolismo literal introducido por Vieta, que consistía en el uso exclusivo de letras mayúsculas: Las vocales, para las incógnitas, y las consonantes, para las cantidades conocidas. Es importante aclarar que al transcribir parte de la memoria del *Methodus* respetamos el texto como lo tradujo González Urbaneja, el cual emplea letras minúsculas.

La idea de "hacer adiguales" dos expresiones proviene de Diofanto, quien usa, en la *Aritmética*, el término griego *parisótes* para designar una aproximación a un número racional tan cercana a éste como sea posible. Xylander acuña el término latino *adaequalitas* del griego *parisótes* en su versión al Latín de la *Aritmética*, publicada en 1575 ([8], p. 270). Boyer entiende la "adigualdad" como una pseudo-igualdad que llega a ser igualdad cuando E se hace cero, e introduce el vocablo inglés *pseudo-equality* para traducir el latino *adaequalitas*, que es el usado por Fermat en su texto ([2], p. 156). Andersen, por su parte, interpreta "hacer adiguales" dos expresiones con el significado de hacerlas tan aproximadamente iguales como sea posible ([9], p. 38).

En algunos ejemplos, resueltos por Fermat, la cantidad máxima ó mínima en consideración contenía una raíz cuadrada. En esas situaciones, Fermat elevaba al cuadrado la adigualdad antes de aplicar las últimas etapas de su regla y, en particular, al aplicar la etapa 6, dividía todos los términos por una misma potencia de E, escogiendo ésta de manera que al menos uno de los términos resultantes no contuviera E.

Fermat escogió, para ilustrar su método, el problema de dividir un segmento dado en dos partes de tal manera que el producto de las longitudes de éstas sea un máximo. Sea B, la longitud del segmento dado y A, la de la primera parte, como se muestra en la Figura 2. Es necesario hacer máxima

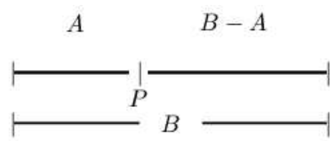

Figure 2: División del segmento B.

el área del rectángulo de la Figura 3, es decir, la cantidad $A(B-A)$. La

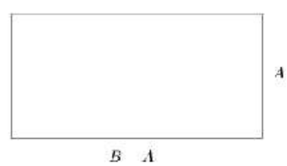

Figure 3: Rectángulo de área máxima.

solución del problema era bien conocida: el valor $A = \frac{B}{2}$ hace que la cantidad $A(B-A)$ sea un máximo.

Vamos a desarrollar el problema paso a paso apelando a la regla propuesta por Fermat.

1. Identificamos con A la incógnita del problema.

2. La cantidad máxima es $A(B-A)$, la cual, desarrollada en potencias de A, nos da

$$AB - A^2. \tag{1}$$

3. Sustituimos A por $A+E$, en (1), con lo cual obtenemos $(A+E)[B-(A+E)]$, que, desarrollada en potencias de A y E, nos da

$$AB + BE - 2AE - A^2 - E^2. \tag{2}$$

4. Hacemos "adiguales" las dos expresiones de la cantidad máxima, dadas en (1) y (2), así:

$$AB + BE - 2AE - A^2 - E^2 \sim AB - A^2,$$

donde el símbolo $\sim$ representa la adigualdad.

5. Eliminamos los términos comunes y obtenemos

$$BE - 2AE - E^2 \sim 0.$$

6. Dividimos todos los términos por E para obtener

$$B - 2A - E \sim 0.$$

7. Ignoramos los términos que aún contengan E, lo que nos dará

$$B - 2A \sim 0.$$

Las cantidades restantes se hacen iguales para llegar a la expresión

$$B - 2A = 0.$$

8. La resolución de esta última ecuación nos dará el valor $A = \frac{B}{2}$, que hace que la cantidad $A(B - A)$ sea un máximo.

Según explica Fermat en el *Syncriseos et anastrophes*, que data aproximadamente de 1640, el procedimiento para calcular máximos y mínimos se le ocurrió al observar que, si el segmento de longitud B es dividido por un punto P en dos partes de longitudes A y $B - A$, entonces hay en general dos posiciones de P para las cuales el producto $A(B - A)$ es igual a una cantidad dada Z. El valor máximo de dicho producto es $\frac{B^2}{4}$, valor para el cual hay solo una posición de P, a saber, el punto medio del segmento dado, tal como lo había establecido Pappus.

Fermat analiza la ecuación

$$X(B - X) = Z \tag{3}$$

la cual tiene dos raíces, que denota por A y E, cuando $Z < \frac{B^2}{4}$.

Haciendo uso de la teoría de ecuaciones de Vieta, Fermat obtiene sucesivamente las expresiones $A(B - A) = E(B - E)$, $AB - A^2 = EB - E^2$, $BA - BE = A^2 - E^2$ y $B(A - E) = (A - E)(A + E)$. Dividiendo la última expresión por $A - E$, llega a $B = A + E$. Entre más próximo esté Z de $\frac{B^2}{4}$, la diferencia entre A y E será menor, y finalmente, cuando $Z = \frac{B^2}{4}$, se tendrá A igual a E y $B = 2A$, que es la solución única que da un valor máximo del producto. Así, para hallar la cantidad máxima se hace necesario igualar las raíces A y E.

Con el fin de evitar las dificultades de la división por $A - E$, Fermat decidió tomar las dos raíces de (3) como A y $A + E$, y dividir por E. Al final, para igualar las raíces A y $A + E$, hizo $E = 0$. El recurso de hacer $E = 0$ conduce a los mismos resultados que la instrucción dada por Fermat en la etapa 7 de su regla, en la cual pide ignorar o suprimir aquellos términos que todavía contengan a E. Cuando se aplicaba el procedimiento de Fermat era de común usanza hacer explícitamente $E = 0$ al final del proceso, a pesar de que en las etapas iniciales del mismo se pide dividir por E, lo que exige $E \neq 0$. El método funcionaba en la práctica y permitió resolver numerosos problemas de máximos y mínimos, a pesar de la incongruencia que hemos señalado, la cual, al decir de Andersen, se convirtió en una *"espina clavada en el costado del matemático"* ([9], p. 41).

Debido a la eficacia práctica del método de máximos y mínimos y a pesar del defecto que hemos señalado, Fermat lo aplicó a la solución de problemas de otros campos, como la determinación de los centros de gravedad de diferentes figuras geométricas o la construcción de la tangente a una curva en un punto dado de esta. Fermat extendió su método también a la óptica: asumiendo que un rayo de luz que pasa de un medio a otro sigue siempre el camino más rápido (lo que hoy se conoce como el principio del tiempo mínimo de Fermat), usó el método para determinar el camino en el que la luz emplea el mínimo tiempo. Fermat demostró finalmente que su principio del tiempo mínimo implicaba la ley de la refracción que Snell había establecido en 1619.

Queremos resaltar las siguientes características del método de Fermat:

1. El método da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco permite distinguir un máximo de un mínimo.

2. El procedimiento es puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.

3. El método de máximos y mínimos de Fermat no implica, en principio, el concepto de límite.

Nos preguntamos cuán cerca estuvo Fermat de la noción de derivada. Observamos, en primer lugar que, sí en las etapas 2 y 3 denotáramos la cantidad máxima ó mínima por $f(A)$ y $f(A+E)$, tendríamos $f(A+E) \sim f(A)$ en la etapa 4. En la etapa 5, eliminaríamos los términos comunes y podríamos poner $f(A+E) - f(A) \sim 0$. En la etapa 6, dividiríamos por E y tendríamos $\frac{f(A+E)-f(A)}{E} \sim 0$. En la etapa 7, eliminaríamos los términos que todavía contienen E, ó bien haríamos $E = 0$, y obtendríamos la expresión

$\left(\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right)_{E=0} \sim 0$. Al resolver, finalmente, la ecuación

$$\left(\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right)_{E=0} \sim 0 \tag{4}$$

obtendríamos los valores de A que corresponden a máximos ó mínimos de $f(A)$. Si, inducidos a ello por nuestra mirada de hoy, interpretáramos la expresión $\left(\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right)_{E=0}$ en el sentido de tomar el límite cuando $E \to 0$, entonces tendríamos

$$\lim_{E\to 0} \frac{f(A+E)-f(A)}{E} = 0, \tag{5}$$

en lugar de (4), y la solución de (5) nos daría los valores de A para los cuales $f(A)$ es máximo ó mínimo.

Si, con el ánimo de insistir en una notación como la de hoy, pusiéramos $A = x$ y $E = \Delta x$, la ecuación (5) quedaría

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(A+\Delta x)-f(A)}{\Delta x} = 0. \tag{6}$$

Sabemos que, si dicho límite existiera, sería igual a la derivada $f'(x)$ y tendríamos la expresión

$$f'(x) = 0. \tag{7}$$

Afirmaríamos, entonces, como lo haría un estudiante de hoy, situado en otro contexto teórico, que las soluciones de la ecuación (7) nos dan los valores de x para los cuales $f(x)$ es máximo ó mínimo relativo. Afirmaciones como esta se encuentran, con frecuencia, en los textos de historia de las matemáticas. Eves, por ejemplo, dice:

> "Aunque la lógica de la exposición de Fermat deja mucho que desear, se ve que su método es equivalente a establecer que
>
> $$\lim_{h\to 0} \frac{f(A+h)-f(A)}{h} = 0.$$
>
> Es decir, que la derivada de $f(x)$ es igual a cero. Este es el método acostumbrado para encontrar los máximos y mínimos ordinarios de una función $f(x)$ y a él se refieren a veces nuestros libros de texto elementales como el método de Fermat" ([5], p. 326).

Más recientemente puede encontrarse en la Internet el siguiente texto que aparece respaldado por el Ministero dell' Istruzione, dell' Universitá e della Recerca. Laboratorio a distanza MATMEDIA. Servizio per l' insegnamento / apprendimento della Matematica. Universitá degli studi di Napoli.

"L'invenzione del calcolo diferénciale

Gli storici non sono concordi nello stabilire "chi per primo" abbia formulato un procedimento che possa essere considerato la prima forma di derivazione.

C'è chi attribuisce al matematico René Francois de Sluse (1622-1685), nato nei Paesi Bassi, tale primato in virtù di una regola, trovata nel 1652, per determinare la tangente ad una curva di equazione $f(x,y) = 0$ con f polinomio. Tale regola, rimasta inedita fino al 1673, può essere così formulata: la sottotangente sarà il quoziente ottenuto ponendo al numeratore tutti i termini contenenti la y, moltiplicati ciascuno per l'esponente della potenza di y che compare in essa, e ponendo al denominatore tutti i termini contenenti la x, moltiplicati ciascuno per l'esponente della potenza di x che compare in essa e poi divisi per x. Ciò equivale, diremmo oggi, a scrivere y f_x/f_y, così che la sottotangente resulta $t = y\,dx/dy$, partendo dall'uguaglianza $f_x\,dx = -f_y\,dy$.

C'è chi, invece, risale al già più volte citato Pierre de Fermat che, nel suo trattato Methodus ad disquirendum maximam et minimam del 1637, elaborò un metodo brillante per individuare i punti in cui una funzione assume un valore massimo o minimo. Infatti il matematico confrontò il valore della funzione $f(x)$ in un certo punto di ascissa x con il valore $f(x+e)$ in un certo punto di ascissa $x+e$ molto vicino ad x. In generale questi due valori sono diversi, ma nel punto più alto o più basso di una curva la loro differenza sarà quasi impercettibile: pertanto per determinare i punti di massimo e minimo Fermat uguagliò $f(x)$ a $f(x+e)$. Quanto più piccolo è l'intervallo "e" tra i due punti tanto più la pseudo-uguaglianza si avvicina all'uguaglianza, per cui, una volta diviso il tutto per "e", il matematico pose $e = 0$. Questo procedimento, diremmo oggi, non è niente altro che il calcolo del limite per "e" che tende a 0 del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+e)-f(x)}{e} = 0$$

uguagliato a 0: quello che noi a tutt'oggi facciamo!!". [7]

Hemos traducido el texto anterior al castellano de la siguiente forma:

"'La invención del cálculo diferencial".

Los historiadores no están aún de acuerdo en establecer "quién fue el primero" en formular un procedimiento que pueda ser considerado la primera forma de derivación. Algunos le atribuyen al matemático René Francois de Sluse (1622-1685), nacido en los Países Bajos, tal primacía en virtud de una regla, hallada en 1652, para determinar la tangente a una curva de ecuación $f(x, y) = 0$ con f polinomio. Tal regla, inédita hasta finales de 1673, pudo ser formulada de esta manera: La subtangente será el cociente obtenido al poner el numerador en términos que contengan la y, multiplicando cada uno por el exponente de la potencia de y que allí aparezca, y poniendo el denominador en términos que contengan la x, multiplicando cada uno por el exponente de la potencia de x que allí aparezca y después dividir por x. Esto equivale, diremos hoy, a escribir $y\frac{f_y}{f_x}$ de esta manera, la subtangente resulta $t = y\frac{dx}{dy}$ a partir de la igualdad $f_x\, dx = f_y\, dy$. Otros, por el contrario, se remontan al ya muy citado Pierre de Fermat que, en el tratado Methodus ad disquirendum maximam et minimam de 1637, elaboró un método brillante para localizar un punto en el cual una función toma un valor máximo o mínimo. En efecto, el matemático confrontó el valor de la función $f(x)$ en un cierto punto de abscisa x con el valor $f(x+e)$ en un cierto punto de abscisa $x + e$ muy cercano a x. En general estos dos valores son distintos, pero en un punto más bajo o más alto de una curva sus diferencias serán casi imperceptibles: Por tanto, para determinar los puntos de máxima y mínima, Fermat igualó $f(x)$ a $f(x+e)$. Cuanto más pequeño es el intervalo "e" entre los dos puntos tanto más la seudo-igualdad se aproxima a la igualdad, por lo cual, una vez dividido todo por "e", el matemático hace $e = 0$. Este procedimiento, diremos hoy, no es otra cosa que el cálculo del límite cuando e tiende a cero de la relación incremental

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e}.$$

Igualado a 0: aquello que todos hoy hacemos!!".

No obstante, las anteriores afirmaciones son erróneas, ya que fuerzan el método expuesto por Fermat y lo interpretan según la mirada de hoy. Veamos detalladamente porqué:

1. Fermat no tiene clara la noción de variable independiente, como se tiene hoy. Él da un significado a una ecuación algebraica en dos incógnitas, las cuales concibe como segmentos, es decir, magnitudes lineales determinadas.

2. Fermat no pensaba en funciones, sino en cantidades. De hecho, habla de una "cantidad máxima o mínima", no de una función que debe asumir su valor máximo o mínimo.

3. Para Fermat, E no es un incremento infinitesimal, pues las raíces de su método de máximos y mínimos se encuentran en el dominio de lo finito algebraico de la teoría de ecuaciones de Vieta. Aunque la idea del cambio de variable mediante el incremento E se pudiera desprender del *Methodus*, la naturaleza de E como entidad algebraica finita impidió que Fermat pasara de lo finito a lo infinito en el tratamiento de máximos y mínimos.

4. El procedimiento expuesto en el *Methodus* no supone, en principio, ningún concepto de límite. Para Fermat, la E no es algo que tiende a cero, pues si observamos la etapa 7 de su regla, lo que hace es eliminar los términos que aún contienen E, o bien hace $E = 0$. Aunque el concepto de *adigualdad* evoluciona posteriormente en Fermat hacia la noción de lo "aproximadamente igual", lo cierto es que en el *Methodus* se circunscribe a lo finito algebraico. Allí, el verbo latino *evanescere* asume el significado de desaparecer y habrá que esperar hasta Newton para que dicho verbo llegue a tener el significado matemático de aproximarse a un límite ("*razones únicas de cantidades evanescentes*").

5. El método, en la etapa 7, permite dividir por potencias superiores de E, cosa que no ocurre en la definición de derivada.

6. Fermat no hace ninguna referencia a que el método de sólo una condición suficiente.

7. Los problemas de máximos y mínimos de Fermat son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

3 El método de Fermat para determinar la tangente a una curva en un punto dado

Fermat, como una aplicación de su método de máximos y mínimos, determinó en el *Methodus* la tangente a una parábola. Es importante señalar, antes de describir este procedimiento, que la tangente será conocida si, dado el punto de tangencia, puede determinarse el punto de intersección de la tangente con el eje de la parábola. Para determinar este punto basta con encontrar la proyección sobre el eje, del segmento de tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de intersección; esta proyección es llamada la subtangente. Apolonio había resuelto el problema en *Las Cónicas*, de la manera siguiente:

> "Proposición I-33: Si desde un punto de una parábola se traza de una manera ordenada una recta sobre el diámetro y se toma una igual a la que esta última determina en el diámetro en la dirección de este y a partir del vértice, la recta de unión del punto

así obtenido con el que se tomó en la parábola será tangente a esta" ([1], p. 343).

Consideremos la parábola DB de eje DC, como se ilustra en la Figura 4. La idea de Fermat es aplicar su método de máximos y mínimos para hallar la tangente a la parábola en el punto B. Supongamos, con Fermat, el problema resuelto y sea BE la recta buscada. Tomemos un punto arbitrario O sobre BE y tracemos el segmento IO paralelo a la ordenada BC, donde P es el punto de intersección de este segmento con la parábola.

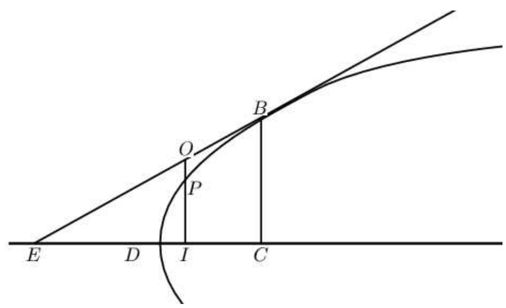

Figure 4: Tangente a la parábola.

El procedimiento seguido por Fermat([9], p. 42 - 43) es el siguiente: De la desigualdad $IO > IP$ y de la propiedad característica de la parábola[1] ([1], p. 338), que se expresa mediante la proporción siguiente:

$$DC : DI = CB^2 : IP^2 \tag{8}$$

obtenemos

$$DC : DI > CB^2 : IO^2. \tag{9}$$

Como los triángulos EIO y ECB son semejantes, tenemos

$$CB^2 : IO^2 = EC^2 : EI^2 \tag{10}$$

y, por lo tanto,

$$DC : DI > EC^2 : EI^2. \tag{11}$$

[1] Apolonio estableció esta propiedad en *Las cónicas*, de la manera siguiente: "Proposición I-20: Dos rectas trazadas ordenadamente de la parábola al diámetro, las rectas que determinan en este, del lado del vértice, son entre sí como los cuadrados de las primeras rectas."

Haciendo[2] $EC = a$ (a es la incógnita), $DC = d$ (d es conocida, pues el punto B está dado) y $IC = e$ en (11), tenemos

$$d : (d - e) > a^2 : (a - e)^2. \tag{12}$$

De donde obtenemos

$$a^2 d + e^2 d - 2aed > a^2 d - a^2 e. \tag{13}$$

Ahora, Fermat sustituye en (6) la desigualdad por la adigualdad, obteniendo

$$a^2 d + e^2 d - 2aed \sim a^2 d - a^2 e \tag{14}$$

y, continúa con las etapas 5 - 8 de su regla, de la manera siguiente:

Etapa 5. Elimina los términos comunes de (14), obteniendo

$$e^2 d - 2aed \sim -a^2 e. \tag{15}$$

Etapa 6. Divide todos los términos de (15) por e, obteniendo

$$ed - 2ad \sim -a^2 \tag{16}$$

Etapa 7. En la adigualdad (16) ignora el término ed, que es el único que aún contiene e, obteniendo

$$-2ad \sim -a^2. \tag{17}$$

Reemplaza la adigualdad (17) por la igualdad

$$-2ad = -a^2. \tag{18}$$

Etapa 8. Finalmente, resuelve la ecuación (18) para a, obteniendo $a = 2d$, es decir, $EC = 2DC$, tal como lo había establecido Apolonio.

La exposición de Fermat era imprecisa con respecto al problema de máximos y mínimos que tenía en mientes y que le sirvió para la determinación de la recta tangente a la parábola. Observamos, sin embargo, que a partir de la desigualdad (12) se sigue

$$\frac{a^2}{d} < \frac{(a - e)^2}{d - e}.$$

Ahora bien: Si el punto O se desplaza sobre la tangente hasta el punto de contacto B y, en consecuencia, I lo hace hacia C sobre el eje de la parábola, entonces la razón $\frac{(a-e)^2}{d-e}$ alcanzará su valor máximo cuando los puntos O e

[2]Para una mayor comodidad en la lectura, hemos preferido usar las letras minúsculas a, d y e, en lugar de las mayúsculas A, D y E, que son las que había empleado Fermat en consonancia con Vieta.

I coincidan, respectivamente, con B y C, es decir, cuando la longitud e del segmento IC sea cero. Lo cual sugiere el siguiente problema de extremos (máximos y mínimos):

Problema 1: Dado el segmento CD, hallar en su prolongación a partir de D un punto E tal que $\frac{CE^2}{CD}$ sea un extremo (mínimo). (Ver Figura 5) Es im-

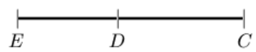

Figure 5: Problema de mínimo.

portante resaltar que, en el momento de la invención del método de tangentes, Fermat solo contaba con los avances de la geometría griega, los cuales no permitían hablar de razones entre distintas dimensiones geométricas, como, por ejemplo, entre áreas y longitudes. Es Descartes quien muestra que es posible sumar, restar, multiplicar y dividir segmentos dados, obteniendo un nuevo segmento, para lo cual precisa de un segmento unidad ([3], p. 5).

De esta forma, pensamos que para Fermat, $\frac{CE^2}{CD}$ es la razón entre el área de un cuadrado de lado CE y el área de un rectángulo de lados CD y la unidad.

Veamos cómo se resolvería este problema con los ocho pasos de la regla de Fermat.

1. Ya hemos identificado con a la longitud desconocida del segmento EC.

2. La cantidad mínima sería
$$\frac{a^2}{d} \tag{19}$$
expresada en potencias de a.

3. Sustituiríamos a por $a-e$ y d por $d-e$, en (19), con lo que obtendríamos $\frac{(a-e)^2}{d-e}$, que al desarrollarla en potencias de a y e, nos daría $\frac{a^2-2ae+e^2}{d-e}$.

4. "Haríamos adiguales" las expresiones de la cantidad máxima halladas en 2. y 3. y obtendríamos $\frac{a^2}{d} \sim \frac{a^2-2ae+e^2}{d-e}$, de donde tendríamos la expresión (14), a partir de la cual se podrían aplicar las etapas 5 - 8 de la regla de Fermat, como en (15), (16), (17) y (18), hasta establecer que $a = 2d$, con lo cual quedaría resuelto el problema.

Adicionalmente, observamos que, a partir de la propiedad característica de la parábola, dada en (8), tendríamos $\frac{CB^2}{CD} = \frac{IP^2}{DI}$. Si denotáramos por k a este cociente, tendríamos $CD = \left(\frac{1}{k}\right) CB^2$. Entonces $\frac{CE^2}{CD} = k\left(\frac{CE^2}{CB^2}\right) = k\left(\frac{CE}{CB}\right)^2$.

Por tanto, la calidad de máximo para $\frac{CE^2}{CD}$ corre parejas con la de mínimo para $\left(\frac{CE}{CB}\right)^2$. Lo cual sugiere el siguiente enunciado alternativo:

Problema 2: Dada la parábola DB y el eje DC de la misma, encontrar sobre el eje un punto E tal que el coeficiente angular $\frac{CB}{EC}$ de la recta EB sea un extremo (máximo). (Ver Figura 6) Descartes criticó el *Methodus*, en una carta

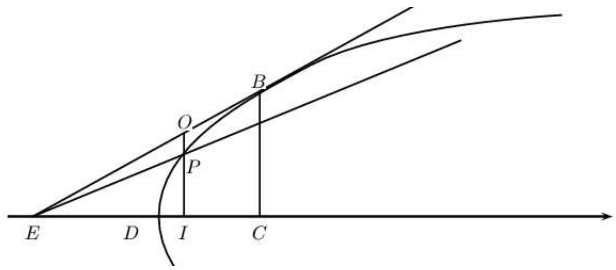

Figure 6: Problema de máximo.

que le dirigió a Mersenne en enero de 1638, con el argumento de que Fermat no había resuelto allí ningún problema de máximos o mínimos cuando determinó la tangente a la parábola y, por lo tanto, aunque el resultado obtenido por Fermat era correcto, el método empleado no podía ser aplicado en general. La respuesta de Fermat data de junio del mismo año y está contenida en la memoria *Méthode de maximis et minimis expliquée et envoyée par M. Fermat a M. Descartes*, conocida como *Méthode expliquée*. En este texto, Fermat le restaba importancia al problema mismo de máximos o mínimos que estuviera involucrado en su determinación de la tangente a la parábola y ponía el énfasis, en cambio, en el procedimiento que había empleado, el cual se derivaba de su método de máximos y mínimos. En efecto, argumentando según Fermat, diríamos que, para valores pequeños de e, el punto O de la Figura 4 puede considerarse indistintamente situado tanto sobre la parábola como sobre la tangente, lo que permite establecer la adigualdad (14) y, posteriormente, haciendo $e = 0$, como en el método de máximos y mínimos, llegar al resultado deseado. Dada la semejanza de los triángulos EOI y EBC, tenemos $IO : BC = EI : EC$, y, de aquí, tenemos $IO = BC\left(\frac{a-e}{a}\right)$.

En vista de que IO es "casi igual" a IP, cuando e es pequeño, el argumento de Fermat nos permite escribir la adigualdad $IP \sim BC\left(\frac{a-e}{a}\right)$, o bien $IP^2 \sim BC^2\left(\frac{a-e}{a}\right)^2$.

Pero, como $IP^2 = kDI$ y $BC^2 = kDC$, tenemos $kDI \sim kDC\left(\frac{a-e}{a}\right)^2$, es decir, $k(d-e) \sim kd\left(\frac{a-e}{a}\right)^2$, es decir, $a^2(d-e) \sim d(a-e)^2$, de donde se obtiene $a^2d - a^2e \sim a^2d + e^2d - 2aed$, que es la expresión (14), a partir de la cual aplicamos las etapas 5 - 8 del método de máximos y mínimos.

Lo esencial del argumento de Fermat radica en considerar que el punto O puede tomarse, de manera casi indistinguible, bien sobre la tangente o bien sobre la curva, lo cual permite establecer la adigualdad y, a partir de ésta, proceder como en el método de máximos y mínimos. En relación con estas consideraciones, dice Boyer:

> "Este procedimiento es estrictamente comparable a aquel que se emplea hoy en el cálculo, cuya justificación teórica está dada en términos de límites; pero la explicación de Fermat hace pensar más bien en el recurso de eliminar (**neglect**) los infinitesimales, el cual se encontrará en el trabajo de Leibniz" ([2], p. 58).

4 La tangente al folio de Descartes

Presentamos enseguida, adaptada a la notación que se emplea en la geometría analítica, la explicación dada por Fermat de su procedimiento para encontrar la tangente en un punto dado a una curva cuya ecuación es conocida. Nuestra presentación se fundamenta en las versiones modernas de Andersen ([9], p. 44) y Eves ([5], p. 326). Advertimos al lector que sea cuidadoso y se prevenga contra los riesgos de caer en el anacronismo, propios de este tipo de ejercicios de adaptación.

Supongamos dada la curva, que la ecuación de ésta es $f(x, y) = 0$ y que su representación gráfica con respecto al sistema de ejes x y y perpendiculares es la que se muestra en la Figura 7. Nos proponemos encontrar la tangente a la curva en el punto B de coordenadas (u, v). Hagamos $EC = a$ (a es la subtangente en el punto B) y $IC = e$. Dado que los triángulos EOI y EBC

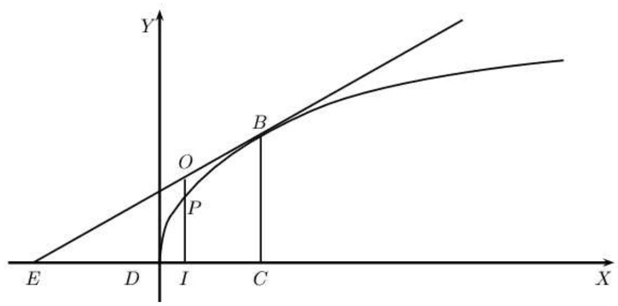

Figure 7: Tangente a una curva.

son semejantes, entonces $\frac{OI}{BC} = \frac{a+e}{a}$, de donde $\frac{OI}{v} = \frac{a+e}{a}$, y, por tanto,

$$IO = v\frac{a+e}{a}. \tag{20}$$

Cuando O está muy cerca de B, IO es casi igual a PI y, por lo tanto, es muy próximo a u y $v\frac{a+e}{a}$ es muy próximo a v. De esta forma,

$$f\left(u+e, v\frac{a+e}{a}\right) \sim f(u, v). \tag{21}$$

Pero como $f(u,v)=0$ se tiene $f\left(u+e, v\frac{a+e}{a}\right)\sim 0$, que es la adigualdad a la que Fermat aplica su método de máximos y mínimos para hallar a, en términos de u y v. Ilustremos este procedimiento algorítmico algebraico aplicándolo al *folio de Descartes*, curva cuya ecuación puede escribirse de la forma

$$f(x,y)=x^3+y^3-nxy=0. \tag{22}$$

Dicha ecuación fue propuesta por Descartes en 1638. Esta curva representa una hoja en el primer cuadrante. La representación gráfica del folio se muestra en la Figura 8, en las coordenadas rectángulares “cartesianas” que se usan hoy. En la ecuación (22), $n=3b$ y b es un parámetro. Sea B el punto de la

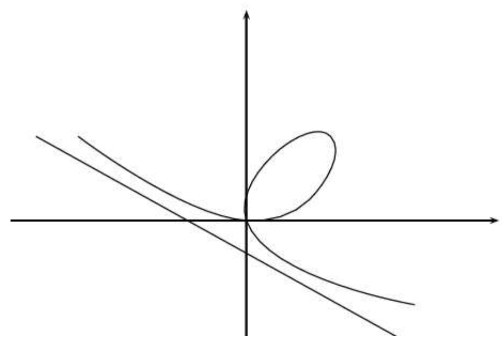

Figure 8: Folio de Descartes.

curva con coordenadas (u,v) en el cual nos proponemos encontrar la tangente. Tenemos

$$\begin{aligned} f\left(u+e, v\frac{(a+e)}{a}\right) &= (u+e)^3+\left[v\frac{(a+e)}{a}\right]^3-n(u+e)v\left(\frac{a+e}{a}\right)\\ &= u^3+3u^2e+3ue^2+e^3+\frac{v^3(a^3+3a^2e+3ae^2+e^3)}{a^3}\\ &-\frac{(nuv+nev)(a+e)}{a} = u^3+3u^2e+3ue^2+e^3+v^3+\frac{3ev^3}{a}+\frac{3e^2v^3}{a^2}\\ &+\frac{e^3v^3}{a^3}-nuv-\frac{enuv}{a}-env-\frac{e^2nv}{a}=(u^3+v^3-nuv)\\ &+\left(3u^2+\frac{3v^3}{a}-\frac{nuv}{a}-nv\right)e\\ &+\left(3u+\frac{3v^3}{a^2}-\frac{nv}{a}\right)e^2+\left(1+\frac{v^3}{a^3}\right)e^3. \end{aligned} \tag{23}$$

Y, como B está en la curva, se cumple que $u^3+v^3-nuv=0$ y, por tanto, obtenemos

$$f\left(u+e, v\frac{(a+e)}{a}\right) = \left(3u^2 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv\right)e + \left(3u + \frac{3v^3}{a^2} - \frac{nv}{a}\right)e^2 + \left(1 + \frac{v^3}{a^3}\right)e^3. \quad (24)$$

Ahora, debemos aplicar el procedimiento algebraico del método de máximos y mínimos a la adigualdad

$$\left(3u^2 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv\right)e + \left(3u + \frac{3v^3}{a^2} - \frac{nv}{a}\right)e^2 + \left(1 + \frac{v^3}{a^3}\right)e^3 \sim 0$$

lo que nos permitirá finalmente encontrar el valor buscado de la subtangente a.

Dividimos por e, según la etapa 6, para obtener

$$\left(3u^2 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv\right) + \left(3u + \frac{3v^3}{a^2} - \frac{nv}{a}\right)e + \left(1 + \frac{v^3}{a^3}\right)e^2 \sim 0.$$

Continuando con la etapa 7, ignoramos los términos que aún contienen e, obteniendo

$$3u^2 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv \sim 0. \quad (25)$$

Luego igualamos los términos en (25) y obtenemos

$$3u^2 + \frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a} - nv = 0. \quad (26)$$

Para finalizar expresamos el valor de a en términos de u y v, en (26), aplicando operaciones algebraicas, así

$$\begin{aligned} 3u^2 - nv &= -\left(\frac{3v^3}{a} - \frac{nuv}{a}\right) \\ a(3u^2 - nv) &= -(3v^3 - nuv) \\ a &= -\frac{3v^3 - nuv}{3u^2 - nv} \\ a &= -v\frac{3v^2 - nu}{3u^2 - nv}. \end{aligned}$$

Que es lo que se quería hallar.

5 La tangente a la cicloide

En su memoria *Doctrinam Tangentium*, que data de 1640, Fermat quiso mostrar que los pasos que se desarrollaron en el *Methodus* no solo eran aplicables a las curvas que Descartes denominó *matemáticas*, es decir, aquellas cuyas propiedades específicas son expresables sólo mediante líneas rectas, sino también a las llamadas curvas *mecánicas*, cuyas propiedades específicas son expresables no sólo mediante segmentos de recta, sino también mediante segmentos curvilíneos ([8], p. 176).

Para hallar la tangente a una curva, la propiedad específica de la curva era considerada por *adigualdad*, no sobre la curva misma sino sobre la tangente a encontrar. De esta forma, las longitudes de arco de las curvas eran sustituidas por las partes correspondientes de las tangentes. Por ejemplo, para la parábola de la Figura 4, se tendría

$$\frac{BC^2}{CD} \sim \frac{OI^2}{DI}.$$

Puede notarse cómo el concepto de *adigualdad* sufre una gran evolución hacia la noción de *aproximadamente igual*, lo cual Fermat deja plasmado en los dos principios siguientes:

> "Primero: Se pueden sustituir las ordenadas de las curvas por las ordenadas de las tangentes ya halladas.
>
> Segundo: Se pueden sustituir las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas". ([8], p. 178)

Con base en estos dos principios, Fermat encuentra la tangente a la *cicloide*. Esta curva es definida como el lugar geométrico descrito por cualquier punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta fija. El primero en estudiarla es Nicolás de Cuse (1401- 1464), en un intento por encontrar el área de un círculo. Galileo, en 1599, le da el nombre a esta curva y Mersenne da la definición satisfactoria y enuncia la propiedad característica, según la cual la longitud de la base de la cicloide es igual a la circunferencia generatriz.

Veamos, haciendo uso de la notación algebraica moderna, cómo halla Fermat la tangente a la cicloide: Consideremos la cicloide HCG de vértice C, cuya circunferencia generatriz es CMF, que ilustramos en la Figura 9, y sea RB la tangente en un punto cualquiera R. Sea $CD = x$, $RD = f(x)$, $MD = g(x)$ y $DB = a$. Según la propiedad característica de la cicloide, tenemos que:

$$f(x) = RM + MD = \text{arc}CM + g(x). \tag{27}$$

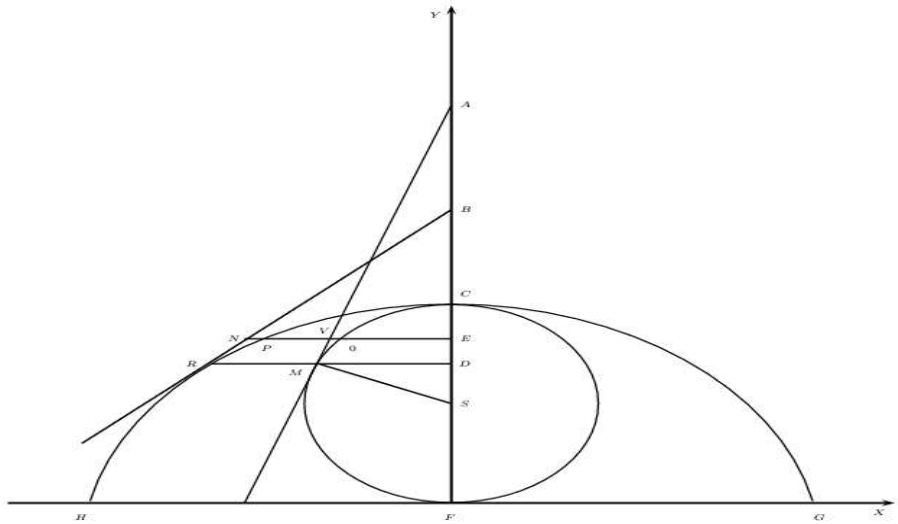

Figure 9: Tangente a cicloide.

Hagamos $DE = e$ y tracemos NE paralela a RD, que corta a RB en N y a la circunferencia en O. Como los triángulos RDB y NEB son semejantes, entonces $\frac{RD}{NE} = \frac{DB}{EB}$. Es decir $\frac{f(x)}{NE} = \frac{a}{a-e}$, de donde

$$NE = f(x)\frac{(a-e)}{a}. \tag{28}$$

De acuerdo con el primer principio, reemplazamos la ordenada $f(x-e)$ de la curva por la correspondiente ordenada de la tangente, es decir, hacemos

$$f(x)\frac{(a-e)}{a} \sim f(x-e). \tag{29}$$

Por la propiedad característica de la cicloide tenemos ahora que

$$f(x-e) = \text{arc}CO + g(x-e). \tag{30}$$

Pero,

$$\text{arc}CO = \text{arc}CM - \text{arc}OM \tag{31}$$

y reemplazando (31) en (30), obtenemos

$$f(x-e) = \text{arc}CM - \text{arc}OM + g(x-e). \tag{32}$$

Sea $MA = d$, la tangente a la circunferencia CMF, que corta a NE en V, y sea $AD = b$, la subtangente a ésta en el punto M. De la Figura 9, vemos que el triángulo MDA es semejante al triángulo VEA, por tanto $\frac{MD}{VE} = \frac{DA}{EA}$, es decir $\frac{g(x)}{VE} = \frac{b}{b-e}$, por lo tanto

$$VE = g(x)\frac{(b-e)}{b}. \tag{33}$$

Aplicando de nuevo el primer principio, ponemos

$$g(x)\frac{(b-e)}{b} \sim g(x-e). \tag{34}$$

Por el segundo principio, podemos reemplazar ahora las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas y, por tanto, ponemos

$$\text{arc}OM \sim MV. \tag{35}$$

Pero, de la semejanza de los triángulos en MDA y VEA tenemos

$$MV = \frac{de}{b}. \tag{36}$$

Luego, de (35) y (36) se tiene

$$\text{arc}OM \sim MV = \frac{de}{b}. \tag{37}$$

Y reemplazando (37) y (34) en (32), tenemos

$$f(x-e) \sim \text{arc}CM - \frac{de}{b} + g(x)\frac{(b-e)}{b}. \tag{38}$$

De nuevo reemplazando (27) y (38) en (29), tenemos

$$\frac{(\text{arc}CM + g(x))(a-e)}{a} \sim \text{arc}CM - \frac{de}{b} + g(x)\frac{(b-e)}{e}$$

$$a\frac{(\text{arc}CM)}{a} - e\frac{(\text{arc}CM)}{a} + \frac{a}{a}g(x) - \frac{e}{a}g(x) \\ \sim \text{arc}CM - \frac{de}{b} + \frac{b}{b}g(x) - \frac{e}{b}g(x). \tag{39}$$

De acuerdo con la etapa 5 de Fermat, eliminamos los términos comunes, quedando

$$-e\frac{\text{arc}CM}{a} - \frac{e}{a}g(x) \sim -\frac{de}{b} - \frac{e}{b}g(x). \tag{40}$$

Según la etapa 6, se dividen todos los términos por e, para obtener $-\frac{\text{arc}CM}{a} - \frac{g(x)}{a} \sim -\frac{d}{b} - \frac{g(x)}{b}$. Por la etapa 7, los restos se hacen iguales y se obtiene $-\frac{\text{arc}CM}{a} - \frac{g(x)}{a} = -\frac{d}{b} - \frac{g(x)}{b}$, o bien $\frac{\text{arc}CM}{a} + \frac{g(x)}{a} = \frac{d}{b} + \frac{g(x)}{b}$, es decir,

$$\frac{\text{arc}CM + g(x)}{a} = \frac{d+g(x)}{b} \tag{41}$$

Reemplazando (27) en (41), tenemos

$$\frac{f(x)}{a} = \frac{d + g(x)}{b}. \tag{42}$$

Por el teorema de Pitágoras, tenemos $d^2 = g(x)^2 + b^2$, de donde $b^2 = d^2 - g(x)^2 = (d + g(x))(d - g(x))$. Así,

$$\frac{b}{d - g(x)} = \frac{d + g(x)}{b}. \tag{43}$$

Sea S el centro de la circunferencia generatriz y r el radio de la misma. Como los triángulos AMS y SMD son semejantes, entonces

$$\frac{d}{r} = \frac{b}{g(x)} = \frac{g(x)}{r - x}. \tag{44}$$

Por propiedad de las proporciones, de la primera y tercera fracciones en (44) obtenemos $\frac{d-g(x)}{r-(r-x)} = \frac{d}{r}$ De donde

$$\frac{d - g(x)}{x} = \frac{d}{r}. \tag{45}$$

Pero, como en (44) $\frac{d}{r} = \frac{b}{g(x)}$, obtenemos en (45) $\frac{d-g(x)}{x} = \frac{b}{g(x)}$. Por lo tanto,

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{b}{d - g(x)}. \tag{46}$$

Igualando (43) y (46), obtenemos

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{d + g(x)}{b}. \tag{47}$$

Ahora, igualando nuevamente (42) y (47), tenemos $\frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{x}$.

De esta forma, las pendientes de MC y RB son iguales. Por lo tanto, la tangente en R es paralela a MC. Así, podemos hallar la tangente a la cicloide en el punto R trazando una paralela a MC por dicho punto.

Queremos resaltar, por su interés para el desarrollo histórico del concepto de límite, la evolución que sufre la noción de *adigualdad* en Fermat. En el *Méthode expliquée*, dicha noción sirve para expresar la pseudoigualdad entre la ordenada en la curva y la de la tangente; en *Doctrinam Tangentium*, se extiende radicalmente para expresar la pseudoigualdad entre la longitud de un arco a lo largo de la curva con el segmento de tangente que la subtiende. Esta última postura podría representar el tránsito intelectual de Fermat hacia conceptualizaciones en las que se involucran el infinito y lo infinitesimal, como lo "aproximadamente igual" o, incluso, lo "igual en el caso límite", y se hace mucho más clara en su *Tratado sobre cuadratura*, en el cual Fermat dice, de manera explícita: *"... de acuerdo con el método de Arquímedes podemos* adigualar*, como dice Diofanto, o igualar por aproximación"* ([8], p. 183).

Reconocimientos: Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite", COLCIENCIAS 1115-11-12704, y en el programa de maestría en educación, con énfasis en docencia de las matemáticas, de la Universidad de Antioquia.

References

[1] Apolonio, *Las cónicas*, en: Vera, F., Científicos griegos, Vol. I, Aguilar, Madrid, 1970.

[2] Boyer, Carl B. *The History of Calculus and its Conceptual Development (The Concepts of the Calculus)*, Dover, New York, 1949.

[3] Descartes, R. *The Geometry*, Dover, New York, 1954.

[4] Euclides. *Elementos de Geometría*, en: Vera, F., Científicos griegos, Vol. I, Aguilar, Madrid, 1970.

[5] Eves, H. *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[6] Fermat, P. *On Maxima and Minima*, en: Smith, D. E., A Source Book in Mathematics, Vol II, Dover, New York, 1959.

[7] http://matmedia.ing.unina.it/Antologia/I grandi momenti/invencione. 04/03/2004.

[8] González Urbaneja, Pedro Miguel, *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Alianza Editorial, S.A. Madrid, 1992.

[9] Grattan - Guinnes, I., *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 - 1910: Una introducción histórica*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

Dirección de los autores: Sergio Alberto Alarcón Instituto Tecnológico Metropolitano — Carlos Mario Suescún Universidad de Antioquia — Andrés de la Torre Universidad de Antioquia, adatorre@yahoo.com