Vol. XIII № 1 Junio (2005)
Matemáticas: 15–30

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Problemas elementales y soluciones difíciles

Yu Takeuchi

Recibido Nov. 22, 2004 Aceptado Feb. 03, 2005

Resumen

Este artículo trata ecuaciones funcionales del tipo $f \circ f = h \circ f$ o $f \circ f = cI$, donde I es la función identidad, h es una función conocida y c es unnúmero real. Las técnicas que se emplena son elementales, aunque los problemas que se resulven no son en modo alguno triviales.

Palabras y frases claves: iteraciones, ecuaciones funcionales, involuciones.

Abstract

The article deals with functional equations of the type $f \circ f = h \circ f$ or $f \circ f = cI$, where I is the identity function on $\mathbb{R}$, h is a given function and c a real number. Although the techniques we use are quite elemental, the problems around these functional equations are by no means trivial.

Keywords: Iterations, fuctional equations, involutions.

AMSC(2000): Primary 39B22, Secondary 39B12.

1 Introducción

Hace unos veinte años un estudiante me preguntó: Profesor, ¿cuál es el problema más difícil del cálculo? No pude contestar a esta pregunta en aquella época, pero desde entonces la pregunta de aquel estudiante siempre ha estado en mi mente. Desde luego que tengo una colección de problemas difíciles del cálculo. Son problemas tradicionales sobre derivadas, integrales, límites y desigualdades que son difíciles de resolver sin utilizar algunos trucos precisos. A mí no me gusta mostrarlos como una respuesta a la pregunta pendiente, pues siempre he tenido el deseo de encontrar los problemas difíciles del cálculo que satisfagan los siguientes criterios:

- que sean preguntas fáciles de comprender,
- que sean problemas difíciles de resolver,
- que los prerrequisitos que no vayan más allá del primer semestre universitario, sin nada de ϵ y δ, nada de vecindades, nada de conjuntos abiertos o cerrados, nada de la compacidad ni de recubrimientos abiertos, etc.
- que los problemas sean utiles para entender la matemática básica,
- que no sean problemas aislados, sino que formen una parte de algún tema más amplio de la matemática.

Evidentemente, los problemas tradicionales del cálculo no cumplen las condiciones anteriores. Recientemente encontré problemas que posiblemente llenen todos los requisitos mencionados. A continuación voy a presentar una serie de problemas del cálculo, que aunque son similares requieren métodos distintos para resolverlos. Curiosamente, no se necesitan conocimientos sobre la derivada, la integral, la regla de L'Hopital o el teorema del valor medio. Los requisitos necesarios son únicamente los conceptos de función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, composición de funciones, límite y continuidad de las funciones, y el teorema del valor intermedio y sus consecuencias.

2 La ecuación $f \circ f = h \circ f$ y sus variantes

Dada $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, vamos a encontrar todas las funciones $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f \circ f = h \circ f \tag{1}$$

o sea, $f(f(x)) = h(f(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Haciendo el cambio

$$g(x) = f(x) - h(x)$$

se obtiene

$$g(f(x)) = f(f(x)) - h(f(x)) = 0, \tag{2}$$

o sea

$$g(f(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sea $S = \{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$ el recorrido de la función f. Entonces se tiene que

$$g(x) = 0, \quad x \in S.$$

Sabemos que S es un intervalo o un conjunto unitario puesto que la función f es continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto se presentan los siguientes casos:

Caso 1. S es un conjunto unitario. Digamos $S = \{a\}$. Debe ser entonces $f(x) = a$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De la ecuación (1) se tiene que $a = h(a)$; es decir, la constante a debe ser un punto fijo de la función $h(x)$.

Caso 2. $S = \mathbb{R}$. En tal caso $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y de (2) se deduce $f(x) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Caso 3. $S = (-\infty, b]$ ó $S = (-\infty, b)$. Aquí se tiene $g(x) = 0$, esto es, $f(x) = h(x)$ si $x \le b$. Como $S = (-\infty, b]$, se tiene que la función $f(x)$ satisface la siguiente condición:

$$\begin{aligned} f(x) =& h(x) \quad \text{si } x \le b, \\ \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) =& -\infty, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) =& b. \end{aligned} \tag{3}$$

Si $S = (-\infty, b)$ se tiene que $g(x) = 0$ si $x < b$, por la continuidad de $g(x)$ en b se obtiene también que $g(x) = 0$ si $x \leq b$. En caso de que $S = (-\infty, b)$, la condición $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = b$ debe ser reemplazada por $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = b$ y $f(x) \neq b$. De (3), teniendo en cuenta que $h(x) = f(x)$ si $x \leq b$, se sigue que la constante b no es arbitraria sino que debe cumplir la condición

$$h(x) \leq b \quad \text{si} \quad x \leq b. \tag{4}$$

Una condición necesaria (más sencilla que la condición (3)) para que f sea una solución de la ecuación (1) es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{rl} f(x) = h(x) & \text{si} \quad x \leq b \\ f(x) \leq b & \text{si} \quad x \geq b. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Más aún, si f satisface la condición (5), entonces f es una solución de la ecuación (1). En efecto, si $x \leq b$ entonces $h(x) \leq b$, y por lo tanto

$$f(f(x)) = f(h(x)) = h(h(x)) = h(f(x)).$$

Si $x \geq b$, entonces $f(f(x)) = h(f(x))$ ya que $f(x) \leq b$.

Caso 4. $S = [a, +\infty)$ ó $S = (a, +\infty)$. En este caso se tiene $g(x) = 0$ si $x \geq a$, esto es, $f(x) = h(x)$ si $x \geq a$. Como S es el recorrido de f, entonces la función f satisface

$$\left.\begin{array}{rr} f(x) = h(x), \text{ si} & x \geq a, \\ \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = & +\infty, \\ \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = & a. \end{array}\right\} \tag{6}$$

De (6) se tiene que $h(x) = f(x) \geq a$ si $x \geq a$. Por lo tanto la constante a no es arbitraria sino que debe cumplir:

$$h(x) \geq a \quad \text{si} \quad x \geq a. \tag{7}$$

Análogamente, si f satisface la condición

$$\left.\begin{array}{rl} f(x) = h(x) & \text{si} \quad x \geq a, \\ f(x) \geq a & \text{si} \quad x \leq a, \end{array}\right\} \tag{8}$$

que es más sencilla que (6), entonces $f(x)$ es una solución de la ecuación (1). En efecto, si $x \geq a$, entonces $h(x) \geq a$, por lo cual

$$f(f(x)) = f(h(x)) = h(h(x)) = h(f(x)).$$

Si $x \leq a$, entonces $f(f(x)) = h(f(x))$.

Caso 5. $S = [a, b]$ (ó $S = [a, b)$, ó $S = (a, b]$ ó $S = (a, b)$). Aquí tenemos $g(x) = 0$ si $a \le x \le b$, esto es; $f(x) = h(x)$ si $a \le x \le b$. Un argumento análogo a los casos anteriores muestra que f satisface:

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) = h(x) \quad \text{si} & a \le x \le b \\ \min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = a, & \max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = b. \end{array}\right\} \tag{9}$$

De (9) se tiene que $a \le h(x) = f(x) \le b$ si $a \le x \le b$. Entonces las constantes a y b no son arbitrarias sino que deben cumplir las siguientes condiciones respectivamente:

$$a \le h(x) \le b \qquad \text{si} \qquad a \le x \le b. \tag{10}$$

Como en los casos 3 y 4, si f satisface la condición simplificada

$$\left.\begin{array}{rl} f(x) = h(x) & \text{si} \quad a \le x \le b, \\ a \le f(x) \le b & \text{si} \quad x \notin (a, b), \end{array}\right\} \tag{11}$$

entonces $f(x)$ es una solución de la ecuación (1). El recorrido S de f puede no coincidir con $[a, b]$, pero es un intervalo contenido en $[a, b]$.

2.3 La ecuación $f \circ f = c$

Si c es una constante se trata de hallar las funciones continuas f que satisfagan

$$f(f(x)) = c, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tome $h \equiv c$ (h es la función contante del valor c), entonces en concordancia con los casos discutidos previamente se tiene

1. Si $S = \{a\}$, entonces $a = c$, por lo tanto: $f \equiv c$

2. Si $S = \mathbb{R}$ se tendría del Caso 2 que $f \equiv c$. Pero una función constante no puede tener $\mathbb{R}$ como recorrido. Es decir, no hay solución.

3. $S = (-\infty, b]$ y $b \ge c$. Del Caso 3, condición (5), se tiene

$$f(x) = c \quad \text{si } x \le b, \qquad f(x) \le b \quad \text{si } x \ge b.$$

4. $S = [a, +\infty)$ y $a \le c$. Del Caso 4, condición (8), se tiene

$$f(x) = c \quad \text{si } x \ge a, \qquad f(x) \ge a \quad \text{si } x \le a.$$

5. $S = [a, b]$ con $a \le c \le b$. Del Caso 5, condición (11), se tiene

$$f(x) = c \quad \text{si } x \in [a, b], \qquad a \le f(x) \le b \quad \text{si } x \notin [a, b].$$

Ejemplo 1. *Las siguientes funciones son soluciones de la ecuación* $f \circ f = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq -3, \\ x^2 + 4x + 3, & -3 \leq x \leq -1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{2(x-2)}{x}, & x \geq 2, \end{cases} \qquad S = [-1, 2).$$

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq -2 - \sqrt{3}, \\ x^2 + 4x + 3, & -2 - \sqrt{3} \leq x \leq -1, \\ 0, & -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{2(x-2)}{x}, & x \geq 2, \end{cases} \qquad S = [-1, 2].$$

2.4 La ecuación $f \circ f = f$

Se trata de hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(f(x)) = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aquí h es la función idéntica.

1. Si $S = \{a\}$ entonces $f \equiv a$.
2. Si $S = \mathbb{R}$, entonces $f(x) = x$ (la función idéntica).
3. $S = (-\infty, b]$. Se tiene
$$f(x) = x \quad \text{si } x \leq b, \qquad f(x) \leq b \quad \text{si } x \geq b.$$
4. $S = [a, +\infty)$ con $a \leq c$, entonces
$$f(x) = x \quad \text{si } x \geq a, \qquad f(x) \geq a \quad \text{si } x \leq a.$$
5. $S = [a, b]$ con $a \leq 0 \leq b$, tenemos
$$f(x) = x \quad \text{si } x \in [a, b], \qquad a \leq f(x) \leq b \quad \text{si } x \notin [a, b].$$
No hay restricciones adicionales para las constantes a, b.

2.5 La ecuación $f \circ f = c\, f, \quad c > 0$

Resolver la siguiente ecuación

$$f(f(x)) = c\, f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}, \text{ con } c > 0.$$

Se tiene $h(x) = c\, x$. Es decir, $h = c\, I$ donde I es la función idéntica.

1. Si $S = \{a\}$ entonces $f \equiv a$ y $a = 0$ en virtud del Caso 1. Por eso $f \equiv 0$.
2. Si $S = \mathbb{R}$, se tiene por el Caso 2 que $f(x) = c\,x$.
3. $S = (-\infty, b]$. De (4) se tiene la condición adicional para b: $b\,(c-1) \leq 0$. De (5) se sigue
$$f(x) = c\,x \quad \text{si } x \leq b, \qquad f(x) \leq b \quad \text{si } x \geq b.$$
4. $S = [a, \infty)$. De (7) se tiene la condición adicional: $a\,(c-1) \geq 0$. Resulta entonces
$$f(x) = c\,x \quad \text{si } x \geq a, \qquad f(x) \geq a \quad \text{si } x \leq a.$$
5. $S = [a, b]$. De (10) se obtiene $a \leq h(x) = c\,x \leq b$. Por eso:
$$a \leq c\,a \leq b, \qquad a \leq c\,b \leq b.$$
Si $c > 1$ no existen constantes a y b que satisfagan las desigualdades anteriores, por lo tanto no aplica el Caso 5. Si $0 < c < 1$ se obtienen las restricciones:
$$a \leq 0, \quad c\,a \geq a, \quad b \geq 0 \quad \text{y} \quad c\,b \leq b,$$
y las siguientes condiciones para la solución f
$$f(x) = c\,x \quad \text{si } x \in [a, b], \qquad a \leq f(x) \leq b \quad \text{si } x \notin [a, b].$$

2.6 La ecuación $f \circ f = c\,f, \quad c < 0$

Se toma $h(x) = c\,x$, con $c < 0$ y se analizan los casos.

1. $S = \{a\}$. Nuevamente $a = 0$ y resulta $f \equiv 0$.
2. $S = \mathbb{R}$, $f(x) = c\,x$.
3. $S = (-\infty, b]$. Se sigue de (4) que $c\,x \leq b$, si $x \leq b$. Tomando $x \to -\infty$ se tendría que $\infty < b$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto el Caso 3 no aplica.
4. $S = [a, b]$. Se presentan las siguientes restricciones para a y b:
$$a \leq c\,x \leq b \quad \text{si} \quad x \in [a, b].$$
Tomando $x = a$ y $x = b$ en la desigualdad anterior se obtienen:
$$a \leq c\,a \leq b, \qquad a \leq c\,b \leq b,$$

Por eso $(1-c)\,a \leq 0$ y $(1-c)\,b \geq 0$. Por lo tanto $a \leq 0$ y $b \geq 0$. Además, se tiene que $c\,a \leq b$, y $a \leq c\,b$. De las desigualdades anteriores se obtiene $|c| \leq 1$. Por lo tanto, si $|c| > 1$ no se presenta el Caso 5.

Si $|c| \leq 1$. Se obtienen las siguientes condiciones para $f(x)$:

$$f(x) = c\,x,\ x \in [a,b], \qquad a \leq f(x) \leq b,\ x \notin (a,b).$$

Nótese que se presenta el Caso 5 sólo cuando $-1 \leq c < 0$, y a, b satisfacen las desigualdades

$$a \leq c\,b \leq 0 \leq c\,a \leq b.$$

3 La ecuación $f \circ f = I$

Consideraremos la ecuación

$$f\,(f\,(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Esta ecuación funcional fué considerada por Charles Babbage [2] en 1815. Sus soluciones se conocen en la literatura especilizada como involuciones.

Proposición 1. *Cualquier solución continua f de (12) es una biyección en $\mathbb{R}$. Más aún, si f no es la identidad, entonces f es estrictamente decreciente y existe un único $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(p) = p$.*

Demostración. f es estrictamente monótona y la la inversa f^{-1} de f existe pues $f(x) = f(x')$ implica

$$x = f\,(f\,(x)) = f\left(f\left(x'\right)\right) = x'.$$

Evidentemente, la identidad I en $\mathbb{R}$ satisface (12). Supongamos que $f \neq I$. Existen α y β tales que $f(\alpha) = \beta, \quad \alpha \neq \beta$. De (12) se tiene que $f(\beta) = f(f(\alpha)) = \alpha$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\alpha < \beta$, entonces

$$f(\alpha) = \beta > \alpha = f(\beta) \quad y \quad \alpha < \beta$$

por lo tanto f es estrictamente decreciente. De (12), se tiene que $f = I \circ f^{-1} = f^{-1}$. Además f es sobreyectiva pues

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty.$$

Puesto que f es estrictamente decreciente, por el teorema de valor intermedio existe un p tal que $f(p) = p$. $\square$

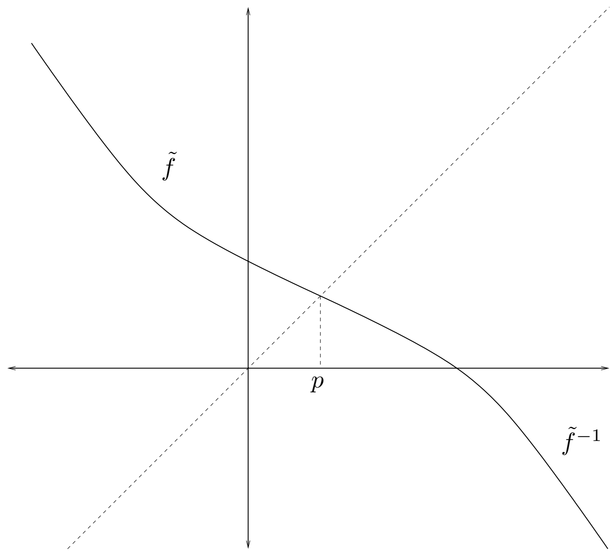

Figura 1:

Sea $\tilde{f}$ la restricción de f al intervalo $(-\infty, p\,]$. Obsérvese que

$$\tilde{f} : (-\infty, p\,] \to [p, \infty), \qquad \tilde{f}^{-1} : [p, \infty) \to (-\infty, p\,]\,.$$

En consecuencia se tiene que

$$f(x) = \tilde{f}^{-1}(x) \quad \text{para} \quad x \geq p.$$

Recíprocamente tenemos el siguiente resultado.

Ejemplo 2. *Defínase* $\hat{f}(x) = -x + 1$ *para* $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$. *Observe que* $p = \frac{1}{2}$. *Resulta claro que* $\hat{f}^{-1}(x) = -x + 1$, $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$, *y que* $f(x) = -x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ *resuelve (12).*

Proposición 2. *Sean* $p \in \mathbb{R}$ *y* $\tilde{f} \to (-\infty, p\,] \to \mathbb{R}$ *continua, estrictamente decreciente y tal que* $\tilde{f}(p) = p$. *Si* $\lim_{x\to-\infty} \tilde{f}(x) = \infty$, *entonces*

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & x \in (-\infty, p\,]\,, \\ \tilde{f}^{-1}(x), & x \in [p, \infty). \end{cases}$$

es una solución continua de (12).

Demostración. La función f así definida es continua, estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$ y sobreyectiva. Además se tiene que:

$$f(f(x)) = \hat{f}^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para} \quad x \leq p,$$
$$f(f(x)) = \hat{f}(\hat{f}^{-1}(x)) = x \quad \text{para} \quad x \geq p.$$

Es decir, f es una solución de la ecuación (12). $\square$

Ejemplo 3. *Sea $\hat{f}(x) = x^2 - 2$ definida en $(-\infty, -1]$. Un cálculo sencillo muestra que la siguiente función es solución continua de (12)*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq -1, \\ -\sqrt{x+2}, & x \geq -1. \end{cases}$$

4 La ecuación $f \circ f = c\,I$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface la ecuación:

$$f(f(x)) = c\,x \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0,\, c \neq 1. \tag{13}$$

Proposición 3. *El gráfico de cualquier solución continua de (13) no toca los ejes coordenados ni la diagonal principal $y = x$ excepto en el origen.*

Demostración. Supóngase que $f(0) = \beta$. Entonces $f(f(0)) = f(\beta) = c\,0 = 0$, $f(f(\beta)) = f(0) = c\,\beta$. Como $f(0) = \beta$ y $f(0) = c\,\beta$, se tiene que $\beta\,(c-1) = 0$. Por hipótesis $c \neq 1$, por lo tanto se tiene que $\beta = 0$.

Ahora supóngase que $f(\alpha) = 0$. Se tiene $f(f(\alpha)) = f(0) = c\,\alpha$. Del argumento anterior de la prueba se tiene que $c\,\alpha = 0$, por la hipótesis $c \neq 0$, entonces $\alpha = 0$.

Si $f(\alpha) = \alpha$ entonces $f(f(\alpha)) = f(\alpha) = c\,\alpha$. Luego $\alpha = c\,\alpha$, o sea que $(c-1)\,\alpha = 0$. Por hipótesis $c \neq 1$, entonces $\alpha = 0$. □

Otra propiedad importante de las soluciones de (13) es:

Proposición 4. *Cualquier solución continua de (13) es biyectiva.*

Demostración. Si $f(x) = f(x')$, entonces

$$c\,x = f(f(x)) = f(f(x')) = c\,x', \quad \text{y por tanto} \quad x = x'.$$

Como la función f es continua en $\mathbb{R}$, entonces $f(x)$ es estrictamente monótona.

De otro lado, de (13) se obtiene

$$f = c\,I \circ f^{-1} = c\,f^{-1}, \quad \text{o sea que} \quad f^{-1} = \frac{1}{c}\,f.$$

Por lo tanto el dominio de f^{-1} es igual a $\mathbb{R}$; esto es, el recorrido de f es igual a $\mathbb{R}$. □

Proposición 5. *Si $c < 0$ no hay soluciones continuas de (13).*

Demostración. Por la proposición 3, si $f(\tau) = 0$ entonces $\tau = 0$. Para $\alpha > 0$, supongamos que $f(\alpha) = \beta$, de la ecuación (13) se tiene que

$$f(\beta) = f(f(\alpha)) = c\,\alpha < 0.$$

Si $\beta > 0$, por el teorema del valor intermedio, existe $\rho \neq 0$ entre α y β tal que $f(\rho) = 0$. Lo cual es absurdo.

Si $\beta < 0$, entonces $f(c\,\alpha) = f(f(\beta)) = c\,\beta > 0$, y por el teorema del valor intermedio existe un $\sigma \neq 0$ entre β y $c\,\alpha$ tal que $f(\sigma) = 0$. Lo cual es igualmente absurdo. Por lo tanto ninguna función continua f satisface la ecuación (13). $\square$

Ahora abordaremos el caso más interesante cuando $c > 0$. Podemos suponer que $c > 1$. Si $0 < c < 1$, transformando la ecuación (13) en la forma

$$I = c\,f^{-1} \circ f^{-1} \quad \text{ó} \quad f^{-1} \circ f^{-1} = \frac{1}{c}\,I,$$

se obtiene el caso de $\frac{1}{c} > 1$ para la función f^{-1}.

Como f es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$, o bien f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Teniendo en cuenta que el gráfico de f sólo toca los ejes coordenados en el origen, se tiene en caso de ser creciente que existen reales $\alpha > 0$, $\beta > 0$, con $f(\alpha) = \beta$. Análogamente, si f es decreciente existen reales $\alpha < 0$, $\beta > 0$, con $f(\alpha) = \beta$.

Proposición 6. *Sea f una solución continua de (13). Si existen reales $\alpha > 0$, $\beta > 0$, con $f(\alpha) = \beta$, entonces $\beta > \alpha$, f es estrictamente creciente y existe un $p > 0$ tal que*

$$f\left(\left(\sqrt{c}\right)^n p\right) = \left(\sqrt{c}\right)^{n+1} p, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Por contradicción supongamos que $f(\alpha) = \beta < \alpha$. Por la proposición 3, la curva $y = f(x)$, $(x > 0)$, está por debajo de la recta $y = x$. Se tiene entonces que

$$c\,\alpha = f(f(\alpha)) = f(\beta).$$

Es decir, $c\,\alpha < \beta < \alpha$, lo que implica $0 < c < 1$ y contradice la hipótesis $c > 1$.

La función f es estrictamente creciente en $x > 0$. En efecto, como $\beta = f(\alpha) > \alpha$, la curva $y = f(x)$, $x > 0$, está por encima de la recta $y = x$ y por lo tanto se tiene que $f(\beta) > \beta = f(\alpha)$ siendo $\beta > \alpha$.

Como $f(\alpha) = \beta > \sqrt{c}\,\alpha$ se obtiene

$$f(\beta) = f(f(\alpha)) = c\,\alpha = \sqrt{c}\,\alpha\,\sqrt{c} < \beta\,\sqrt{c}.$$

En consecuencia, los dos puntos $(\alpha, f(\alpha))$ y $(\beta, f(\beta))$ están en los lados opuestos de la recta $y = \sqrt{c}\,x$. Por el teorema del valor intermedio, existe $p \in (\alpha, \beta)$ con $f(p) = \sqrt{c}\,p$. Se tiene que

$$f(p) = \sqrt{c}\,p, \quad f(\sqrt{c}\,p) = f(f(p)) = c\,p = \left(\sqrt{c}\right)^2 p,$$

y de otro lado para $t = f(p/\sqrt{c})$ obtenemos

$$f(t) = f(f(p/\sqrt{c})) = c\,p/\sqrt{c} = \sqrt{c}\,p.$$

Como $f(p) = \sqrt{c}\,p$ entonces se tiene que $t = f(p/\sqrt{c}) = p$. El resto de la demostración se obtiene por inducción. □

Supóngase que f satisface (13) y sea $p > 0$ elegido de acuerdo con la proposición 6. Considere los intervalos

$$L_n = \left[\left(\sqrt{c}\right)^n p, \left(\sqrt{c}\right)^{n+1} p\right], \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

Se tiene que

$$(0, \infty) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} L_n. \tag{15}$$

Sea f_n la restricción de f al intervalo L_n. Como la función f es continua y estrictamente creciente, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}$ las aplicaciones

$$f_n : L_n \to L_{n+1}, \quad f_n^{-1} : L_{n+1} \to L_n$$

son biyectivas. De (13) se deduce

$$f_{n+1} \circ f_n = c\,I, \quad \text{y}, \quad \frac{1}{c}\, f_{n+1} \circ f_n = I,$$

por lo tanto se obtienen las siguientes fórmulas recursivas:

$$f_{n+1} = c\, f_n^{-1}, \quad f_n = \left(\frac{1}{c}\, f_{n+1}\right)^{-1}. \tag{16}$$

Mostraremos como se construyen todas las soluciones continuas de (13).

Proposición 7. *Sean $p > 0$, $c > 1$, y L_n, $n \in \mathbb{Z}$, la colección de intervalos definidas por (14). Si la aplicación*

$$f_0 : \left[p, \sqrt{c}\,p\right] \to L_1, \quad f_0(p) = \sqrt{c}\,p,\ f_0(\sqrt{c}\,p) = c\,p$$

es continua y estrictamente creciente, entonces las aplicaciones

$$f_n : L_n \to L_{n+1}$$

definidas mediante la recursión (16) son biyectivas y la función

$$g : (0, \infty) \to (0, \infty)\,, \quad g(x) = f_n(x),\ \text{si } x \in L_n$$

es continua y satisface $g(g(x)) = c\,x$ para $x > 0$.

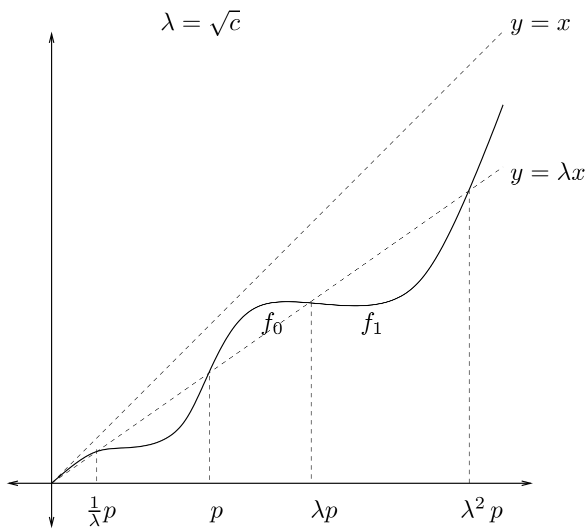

Figura 2:

Demostración. Nótese que $L_0 = [\sqrt{c}\, p, p]$. Se define la función $f_1 : L_1 \to L_2$ mediante $f_1 = c\, f_0^{-1}$. Es claro que f_1 es continua y estrictamente creciente en L_1. Más aún, como $f_1 = c\, f_0^{-1}$, se obtiene que

$$f_1 \circ f_0 = c\, f_\circ^{-1} f_0 = c\, I.$$

Aplicando la recursión (16) se prueba con un argumento análogo que las $f_n : L_n \to L_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, son continuas, biyectivas, estrictamente crecientes y satisfacen

$$f_{n+1} \circ f_n = c\, I, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□

La Proposición 7 indica un procedimiento para construir soluciones continuas y positivas de de $g(g(x)) = c\, x$ para $x > 0$. La construcción para $x < 0$ se puede reducir al caso $x > 0$ mediante el cambio de variables:

$$g(x) = -G(-x), \quad -x = t.$$

En efecto, en términos de la nueva variable se obtiene

$$G(G(t)) = c\, t \quad (t > 0, G(t) > 0),$$

de esta manera se tienen para G las hipótesis de la Proposición 7.

Vale la pena destacar lo siguiente: si g_1 y g_2 son aplicaciones continuas definidas en $[0, \infty)$ y satisfacen

$$g_i\,(g_i\,(x)) = c \quad x > 0, \quad g_i(0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

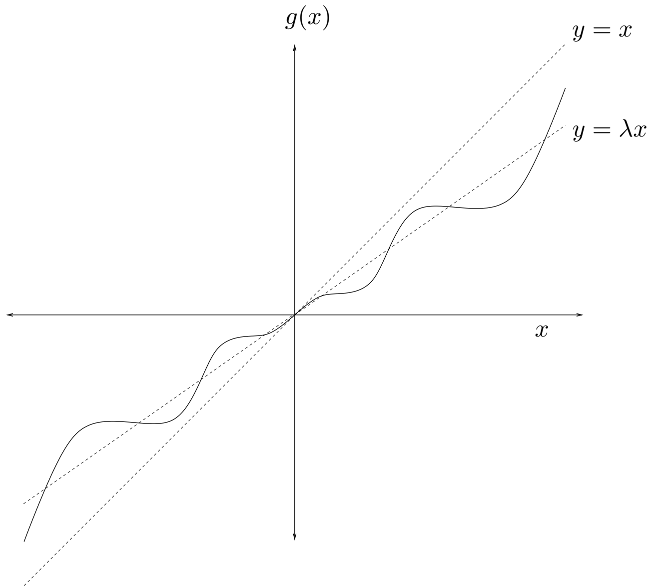

Figura 3:

entonces

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si} \quad x > 0, \\ \\ -g_2(-x) & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$$

es una solución continua de (13).

Ejemplo 4. *Sean $p = 2$ y $c = \frac{1}{4}$. La aplicación f_0 está definida mediante*

$$f_0(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [1, \frac{5}{3}], \\ 4\,(x - 1), & x \in [\frac{5}{3}, 2] \end{cases}$$

Se verifica que

$$f_1(x) = \begin{cases} 4\,(x - 1), & x \in [2, \frac{8}{3}], \\ x + 4, & x \in [\frac{8}{3}, 4] \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in [4, \frac{20}{3}], \\ 4\,(x - 4), & x \in [\frac{20}{3}, 8] \end{cases}$$

Sea

$$g(x) = \begin{cases} x + 4^n, & x \in [4^n\,\frac{2}{3}, 4^n\,\frac{5}{3}], \\ 4(x - 4^{n-1}), & x \in [4^{n-1}\,\frac{5}{3}, 4^n\,\frac{2}{3}] \end{cases}$$

En particular,

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x > 0, \\ -g(-x), & x < 0, \end{cases}$$

es solución continua de (13).

Proposición 8. *Sea f una solución continua de (13). Si existen reales $\alpha < 0$ y $\beta > 0$ con $f(\alpha) = \beta$, entonces f es estrictamente decreciente y satisface*

$$f\left(c^n x\right) = c^n f\left(x\right), \quad x \in \mathbb{R}\,, n \in \mathbb{Z}.$$

Más aún, si f es diferenciable en $x = 0$ entonces $f(x) = \sqrt{c}\,x$.

Demostración. Por la proposición 3 se tiene $f(0) = 0$ y por la proposición 4 f es biyectiva. Ahora bien, $\alpha < 0$ y $f(\alpha) = \beta > 0$, luego f es estrictamente decreciente.

Sean $\tilde{f}$ y $\hat{f}$ las restricciones de f a $(-\infty, 0] \equiv \mathbb{R}_-$ y a $[0, \infty) \equiv \mathbb{R}_+$ respectivamente. Las funciones

$$\tilde{f} : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+, \quad \hat{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-,$$

son continuas, biyectivas y estrictamente decrecientes. De (13) resulta

$$\tilde{f}\left(\hat{f}\left(x\right)\right) = c\,x, \quad x \geq 0, \tag{17}$$

$$\hat{f}\left(\tilde{f}\left(x\right)\right) = c\,x, \quad x \leq 0, \tag{18}$$

Evaluando la expresión 17 en $\tilde{f}\left(x\right)$ y aplicando 18 resulta

$$c\,\tilde{f}\left(x\right) = \tilde{f}\left(\hat{f}\left(\tilde{f}\left(x\right)\right)\right) = \tilde{f}\left(c\,x\right), \quad x \leq 0.$$

Iterando se obtiene $\tilde{f}\left(c^n x\right) = c^n \tilde{f}\left(x\right)$ para todo $x \leq 0$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. Analogamente se deduce $\hat{f}\left(c^n x\right) = c^n \hat{f}\left(x\right)$ para todo $x \geq 0$ y todo $n \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente

$$f\left(c^n x\right) = c^n f\left(x\right), \quad x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Supongamos que $\tilde{f}$ es derivable (por la izquierda) en $x = 0$. De un lado se tiene

$$\frac{\tilde{f}(c^{-n}\,t)}{c^{-n}\,t} = \frac{\tilde{f}(t)}{t} \quad \text{para todo} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como $\lim_{n\to\infty} c^{-n}\,t = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^-$, entonces se tiene:

$$\tilde{f}'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}(c^{-n}\,t) - \tilde{f}(0)}{c^{-n}\,t - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}(t)}{t} = \frac{\tilde{f}(t)}{t}.$$

Recuerdese que $c > 1$ y que $\tilde{f}(0) = 0$, por lo tanto: $\frac{\tilde{f}(t)}{t} = \tilde{f}'(0)$, esto es $\tilde{f}(t) = \tilde{f}'(0)\,t$, o sea que $\tilde{f}$ es lineal. Análogamente se muestra que la derivabilidad (por la derecha) de $\hat{f}$ en $x = 0$ implica que $\hat{f}$ es lineal. Evidentemente si f es lineal y satisface (13) entonces $f(x) = \sqrt{c}\,x$. □

Supóngase que f sea una solución de (13) tal que $f(\alpha) = \beta$, con $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Mostraremos cómo toda la información sobre f se obtiene a partir de la restricción f_0 de f al intervalo $[c\,\alpha, \alpha]$.

Teniendo en cuenta que $\alpha < 0$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} c^n\,\alpha = -\infty, \qquad \lim_{n\to-\infty} c^n\,\alpha = 0.$$

Además

$$\tilde{f}(c^n\,\alpha) = c^n\,\tilde{f}(\alpha) = c^n\beta \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Escribiendo $M_n \equiv [c^{n+1}\alpha, c^n\alpha]$, $n \in \mathbb{Z}$, se tiene:

$$(-\infty, 0) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [c^{n+1}\,\alpha, c^n\,\alpha] = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} M_n, \tag{20}$$

De la definición de los M_n resulta

$$\begin{array}{rcl} x \in M_n & \Leftrightarrow & \frac{x}{c} \in M_{n-1}, \\ c\,x \in M_{n+1} & \Leftrightarrow & x \in M_n. \end{array}$$

Sea $\tilde{f}_n = \tilde{f}\big|_{M_n}$, de (19) se tiene que

$$\tilde{f}_n : M_n \to [c^n\beta, c^{n+1}\beta], \quad n \in \mathbb{Z},$$

es continua, estrictamente decreciente y biyectiva. Obseve ahora que $\tilde{f}$ puede obtenerse a partir de $\tilde{f}_0$ puesto que

$$\tilde{f}_{n+1}(c\,x) = c\,\tilde{f}_n(x), \quad \tilde{f}_{n-1}\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{c}\,\tilde{f}_n(x) \quad \text{si} \quad x \in M_n. \tag{21}$$

Conocido $\tilde{f}$ se determina $\hat{f}$, y con ello f, a partir de la (17, 18). Por eso la recursión (21) determina la solución f de (13). El recíproco resulta también cierto.

Proposición 9. *Sean $c > 1$, $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Cualquier aplicación continua, estrictamente decreciente y biyectiva*

$$\tilde{f}_0 : M_0 = [c\,\alpha, \alpha] \to [\beta, c\,\beta], \quad \tilde{f}_0(\alpha) = \beta,\ \tilde{f}_0(c\,\alpha) = c\,\beta,$$

define mediante la recursión (21) una solución de (13).

Demostración. Se define $\tilde{f}_1$ y $\tilde{f}_{-1}$ de acuerdo con (21):

$$\tilde{f}_1(c\,x) = c\,\tilde{f}_0(x), \quad \tilde{f}_{-1}\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{c}\,\tilde{f}_0(x) \quad \text{para} \quad x \in M_0.$$

Igualmente se definen $\tilde{f}_2$ y $\tilde{f}_{-2}$ de acuerdo con de acuerdo con (21):

$$\tilde{f}_2(c\,x) = c\,\tilde{f}_1(x), \quad \tilde{f}_{-2}\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{c}\,\tilde{f}_{-1}(x) \quad \text{para} \quad x \in M_{-1}.$$

Así sucesivamente. Mediante este procedimiento, la función $\tilde{f}_0$ puede extenderse a una función continua f que resuelva (13). $\square$

Nota del editor. Los problemas tratados en este artículo se enmarcan en las ecuaciones funcionales, cuyos orígenes se remontan a Charles Babbage. Tales ecuaciones fueron estudiadas posteriormente por Abel y Feigenbaum entre otros, debido a su importancia en modelos matemáticos y sus aplicaciones a la teoría de sistemas dinámicos (ver [1], [4]). Se invita al lector a visitar las siguientes páginas web para más información sobre las ecuaciones funcionales y sus aplicaciones:

`http://www.reglos.com/kindermann/ffx.html`
`http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm`

Referencias

[1] Aczel, J. : Functional equations and their applications ,Academic press 1966.

[2] Babbage, C,: An Essay towards the Calculus of Functions. Philosophical transaction of the Royal Society London 105: 389-424, 1815

[3] K. Baron, W. Jarczyk, Recent results on functional equations in a single variable, perspectives and open problems. Aequationes Math. 61: 1-48, 2001

[4] Kindermann, L, Lewandowski, A. and Protzel, L.: Neural Information Processing, ICONIP2001 Proceedings, Fudan University Press, Shanghai, 2001, Vol 2, pp. 1075-1078.

Dirección del autor: Y. Takeuchi, Univ. Nacional, Bogotá