

Matemáticas: Enseñanza Universitaria

Revista oficial de la Corporación Escuela Regional de Matemáticas (ERM)

Resolución 00116, 24 de Mayo de 1977, Ministerio de Gobierno

ISSN 0120-6788

Fundador Yu Takeuchi (U. Nacional) **Director** Jairo Alvarez (U. del Valle)

Editor Graciano Calderón (U. del Valle) **Asesor técnico** Jairo Duque (U. del Valle)

Comité editorial

Raúl Quintero (U. del Valle), Pedro Vicente Esteban (U. EAFIT), Miguel Marmolejo (U. del Valle), Abel Posso (UTP), Mauro Montealegre (U. Surcolombiana), Carlos Trujillo (U. del Cauca).

Editores de secciones

Matemáticas	Raúl Quintero (U. del Valle)
Educación e Historia	Pedro Vicente Esteban (U. EAFIT)
General	Andrés de la Torre (U. de Antioquia)
Notas	Raúl Quintero (U. del Valle) Pedro Vicente Esteban (U. EAFIT)
Reseñas	Abel Posso (U. Tecnológica de Pereira)
Problemas y Soluciones	Yu Takeuchi (U. Nacional)
Resúmenes	Jairo Villegas (U. del Valle)
Noticias y Eventos	Maria Dolly García (U. del Quindío)

Asesores editoriales

Matemáticas: Manuel Abellanas (U. Politécnica de Madrid), B. Bhatt (U. of the West Indies), Mario Estrada (U. de la Havana y de Antioquia). **Educación e Historia:** Carlos Vasco (U. Javeriana), Luis Moreno (CINVESTAV, Méjico).

Matemáticas: Enseñanza Universitaria (nueva serie) es editada por las universidades que se agrupan en el Corporación Escuela Regional de Matemáticas (ERM) y está dirigida a los profesores de matemáticas y a todos los interesados en las matemáticas. Publica dos números al año, con un tiraje de 1000 ejemplares cada uno. El valor de la suscripción anual institucional es de \$30.000 pesos e incluye costos de correo. El valor de una suscripción personal anual es de \$15.000 pesos. Suscripciones de apoyo por \$16.000 ó más pesos son bienvenidas. En las páginas interiores se hallará un formulario de suscripción. En el reverso de la contracarátula expresamos nuestra política editorial y las recomendaciones para autores. Su correspondencia puede enviarla a:

Matemáticas: Enseñanza Universitaria

Departamento de Matemáticas

Universidad de Valle

Apartado Aéreo 25360, Cali, Colombia.

Telfax: + (2)-330-25-66 + (2)-339-32-27

Página web: <http://revistaerm.univalle.edu.co/>

e-mail: revistaerm@univalle.edu.co

Contenido

1 Editorial

Matemáticas

- 5 Método numérico para un modelo de ondas dispersivas**
Juan Carlos Muñoz
- 21 Los espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}(E)$**
Jairo Villegas G
- 33 Métricas conformes en superficies compactas con frontera**
Gonzalo García y Oscar Andrés Montaña
- 45 Injection and suction effects on three-dimensional unsteady flow and heat transfer between two parallel porous plates**
R.C. Chaudhary y Bhupendra Kumar Sharma
- 57 Normas tensoriales construidas mediante espacios de sucesiones de Banach**
Patricia Gómez Palacio, Juan Antonio López Molina y María José Rivera Ortún

Educación e Historia

- 73 El concepto de aproximación local: una propuesta metodológica a partir de la recta tangente**
Pedro Vicente Esteban Duarte y Pedro Pérez Carreras
- 91 El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos**
César Augusto Delgado G

General

- 129 Resúmenes de Artículos, Proyectos y Tesis**
- 135 Problemas y Soluciones**
- 139 Noticias y Eventos**

El encuentro y las nuevas realidades de la Escuela Regional de Matemáticas

El ENCUENTRO es una de las actividades canónicas de la Corporación Escuela Regional de Matemáticas (ERM), conjuntamente con la publicación de la revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria. En este evento se dan cita anual, profesores de los departamentos de matemáticas de las universidades que se agrupan en la Corporación, profesores de otras universidades colombianas y, regularmente, invitados internacionales. Concurren, también, profesores de secundaria, al igual que estudiantes de pre y postgrado de matemáticas y de licenciaturas en matemáticas. Su programa académico se estructura de una oferta abierta de cursillos, ponencias y conferencias que presenta la comunidad matemática regional. Uno que otro cursillo y una que otra conferencia se solicitan, casi siempre, a los invitados internacionales. El último Encuentro, el IX, se realizó en Neiva entre el 15 y el 19 de Septiembre de este año. Se realizaron 25 cursillos, 100 ponencias y 10 conferencias. Asistieron del orden de 700 personas.

El Encuentro, a pesar de los altibajos organizativos que se le pueden atribuir, ha sido, quizás, el instrumento mas importante en la creación de un identidad académica regional y nacional de la ERM y se ha convertido en un punto de referencia para la actividad matemática regional. En esta medida, ha venido jugando un papel importante en la conformación de una comunidad matemática regional y nacional.

Cuando en 1992 se iniciaron los Encuentros, la actividad matemática regional avanzada estaba concentrada en la Universidad del Valle. En otras universidades de la ERM prácticamente no existían, ni profesores con doctorado, ni grupos de investigación, ni programas de formación avanzada en matemáticas.

Once años después, este panorama ha cambiado de manera importante. La actividad matemática avanzada ha crecido significativamente en el contexto de la ERM y, cerca de las dos terceras partes de ella, cuantificada en términos de profesores con doctorado, grupos de investigación activos reconocidos por COLCIENCIAS, publicaciones y programas de formación avanzada, se realiza por fuera de la Universidad del Valle. En la región se perfilan hoy, dos programas de doctorado que, posiblemente, terminen integrados en la práctica; uno liderado por la Universidad del Valle y otro por las universidades de Antioquia, EAFIT y Cauca.

Paralelamente con este desarrollo matemático, y en el mismo contexto institucional de la ERM, se vienen expresando otras necesidades ligadas con el desarrollo social de las matemáticas, que no encuentran una respuesta explícita en el desarrollo matemático per se. Estas necesidades están del lado de la educación matemática, principalmente, porque en varias de las universidades de la ERM, incluyendo algunas de las universidades fundadoras, sus departamentos de matemáticas están inscritos en Facultades de Educación y, por lo tanto, tienen una proyección académica natural hacia el profesorado del bachillerato y hacia el estudio de los problemas de la enseñanza de las matemáticas en la secundaria. Pero, también, porque en todas las universidades de la ERM, la docencia de las matemáticas, en los primeros años de universidad, plantea problemas crónicos que permanecen sin respuesta.

La educación matemática, como disciplina, ha tenido también avances en el contexto de la ERM, pero, su desarrollo relativo, es notoriamente inferior al desarrollo matemático, si se le mira desde la perspectiva del número de profesores con doctorado, tradición investigativa y programas de formación avanzada. Estos avances son mas visible en las mismas universidades en las que se ha dado el mayor desarrollo matemático.

Es importante anotar que si miramos el desarrollo matemático del país, desde una perspectiva social y cultural amplia, no solamente desde la perspectiva de una producción de tipo matemático que se publica en revistas internacionales y de la formación de pequeños grupos profesoriales a nivel avanzado, que replican el sistema, dicho desarrollo requiere, tanto de una capacidad académica matemática amplia, a nivel avanzado, como de una capacidad académica similar, en el acampo de la educación matemática. Y, habría que agregar, con articulaciones fuertes entre ellas. Resulta difícil concebir un desarrollo matemático importante y auténtico, en un país atrasado educativamente en matemáticas. A su vez, no se ve como se pueda superar dicho atraso si la comunidad matemática permanece aislada de dicha problemática y distante de la comunidad de quienes cultivan la educación matemática como disciplina.

El desarrollo matemático y el desarrollo de la educación matemática, como disciplina y como práctica, aparecen un tanto desarticulados en el contexto de las universidades de la ERM y se expresan, a veces, como intereses contrapuestos o por lo menos divergentes. Una prueba visible es la poca integración de las propuestas curriculares en que se forman ambas comunidades y la ausencia de grandes proyectos compartidos de mejoramiento educativo. De otro lado, es común que miembros de la comunidad matemática miren con cierto desdén y desconfianza a quienes

cultivan la educación matemática como disciplina y que no crean mucho en los beneficios reales de tal actividad. No será posible mejorar la calidad de la investigación y, en general, de la actividad académica en educación matemática, mientras se mantenga dicho divorcio. Como tampoco será posible, en esta situación, que los matemáticos superen su visión ingenua sobre los problemas de la educación matemática.

Esta situación le está planteando problemas importantes al programa académico de los Encuentros que, creemos, no se están resolviendo satisfactoriamente.

El sector mas avanzado matemáticamente no parece sentirse a gusto en los Encuentros y parece necesitar un espacio de intercambio mas especializado. La respuesta podría estar en las Escuelas de Verano, que empiezan a expresarse en el contexto de la ERM, asociadas con los grupos de investigación mas evolucionados. Éstas no serían un sustituto del Encuentro, sino una forma de ampliar y ajustar los espacios capacitación, actualización y de intercambio académico que genera la ERM, de acuerdo con los diversos niveles que se expresan en su desarrollo.

Creemos, a este respecto, que sería importante repensar su formato. De un lado, para incorporar, como parte de su programación regular, la presentación de comunicaciones especializadas. Y, de otro, para permitir la articulación de sus cursos y seminarios con los programas de formación avanzada existentes en las universidades de la ERM, en el marco de una visión regionalizada de tales programas.

De otro lado, creemos que el Encuentro debería cumplir una función de capacitación profesoral mas institucionalizada. En lo concerniente a cursos y seminarios, pensamos, que parte importante de esta programación debería estar al servicio de programas de formación de mediano y largo plazo y de actualización, tanto para profesores de bachillerato como para profesores universitarios de matemáticas, que enseñan en carreras que forman profesionales no matemáticos. Estos programas deberían estar debidamente institucionalizados, contar con el apoyo financiero de agencias gubernamentales e instituciones de fomento educativo y, con nexos posibles, con los programas de formación avanzada en matemáticas y educación matemática, existentes en universidades de la ERM.

Al lado de estos programas consideramos importante que subsista una programación, limitada, muy bien evaluada, de cursillos y ponencias, producto de una oferta libre de la comunidad matemática regional.

El Encuentro podría constituirse también en un espacio para el estímulo al talento matemático y para la aproximación a la investigación, tanto en matemáticas como en educación matemática. Se podría pen-

sar en talleres de aproximación a la investigación, dirigidos por investigadores de experiencia, no tanto desde la perspectiva de cursos teóricos sobre metodología de la investigación, sino sobre el estudio de casos, relacionados con el desarrollo de proyectos específicos ya realizados. El Encuentro podría ser, igualmente, una plataforma de presentación de trabajos destacados de estudiantes de pre y post grado. Actividades como la de Germine, realizada en el pasado Encuentro, están en la dirección correcta.

Por ultimo, consideramos importante que el Encuentro propicie un espacio, a manera de Foro, donde el profesorado, a la vez que analiza el desarrollo de la Escuela, se plantea y discute los problemas que enfrenta el desarrollo de las matemáticas a nivel regional y nacional.

En conclusión. Creemos que las nuevas realidades de la ERM y los problemas que se vienen expresando, de distintas maneras, en la realización del Encuentro, plantean la necesidad de repensar y reformular la concepción y formato del Encuentro. El cambio surge como necesario frente a las necesidades que está planteando el desarrollo superior de la ERM pero, también, para garantizar la subsistencia del mismo Encuentro. El año 2004 parece ser un buen año para iniciar este proceso de cambio.

Método numérico para un modelo de ondas dispersivas

Juan Carlos Muñoz

Resumen

Presentamos un esquema numérico de alta precisión para estudiar las soluciones de la ecuación de T.B. Benjamin, J. Bona y J.J. Mahony (BBM). Este es un modelo dispersivo uni-direccional que describe la propagación de una onda con pequeña amplitud en la superficie del agua en un canal raso con profundidad constante. La ecuación BBM tiene soluciones de onda solitaria que calculamos de manera explícita. En el caso lineal también existen soluciones exactas que se pueden calcular mediante la transformada de Fourier. Este tipo de soluciones son utilizadas para verificar la precisión, estabilidad y convergencia del modelo numérico.

Palabras y frases claves: Dispersión, Ondas solitarias, Diferencias finitas

1 Introducción

En este artículo estudiamos numéricamente las soluciones de la ecuación deducida por T.B. Benjamin, J. Bona y J.J. Mahony (BBM) [2]

$$u_t + (1 + \alpha u)u_\xi - \beta u_{\xi\xi t} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

sujeta a la condición

$$u(\xi, 0) = f(\xi). \quad (2)$$

Esta ecuación describe el movimiento de ondas con pequeña amplitud en la superficie de un canal raso limitado inferiormente por un fondo impermeable constante. El fluido que llena el canal se supone incompresible, irrotacional y no se consideran efectos de la viscosidad. Estos supuestos son razonables debido a que los efectos de vorticidad y viscosidad son apreciables sólo cerca del fondo. La posición en el canal unidimensional se representa con ξ y el tiempo con t . La función real $u = u(\xi, t)$ representa la amplitud de la onda medida con respecto al nivel de reposo del agua. Los parámetros adimensionales positivos α , β miden la magnitud de los efectos no lineales y dispersivos, respectivamente, en el fenómeno. En el régimen de aguas rasas y ondas de pequeña amplitud tenemos $\beta \ll 1$ y $\alpha \ll 1$.

Señalamos que la ecuación (1) está relacionada con otros modelos unidireccionales de aguas rasas a través de la expresión formal

$$u_t = -u_\xi + O(\alpha, \beta).$$

Por ejemplo, insertando esta relación en (1) obtenemos la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + (1 + \alpha u)u_x + \beta u_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (3)$$

donde se han retenido hasta términos de primer orden $O(\alpha, \beta)$.

Aspectos teóricos relativos a la ecuación BBM tales como existencia, unicidad y estabilidad de ondas solitarias han sido estudiados por Benjamin [1] y Bona et al. [3], [4]. El propósito de este trabajo es presentar un esquema de diferencias finitas diseñado específicamente para ecuaciones de evolución del tipo dispersivo, tal como (1).

Si se intenta una aproximación en diferencias finitas directamente en la ecuación BBM, encontramos que el error de truncamiento en las discretizaciones de la derivada de primer orden u_ξ contiene términos dispersivos de tercer orden, tales como $u_{\xi\xi\xi}$, $u_{\xi tt}$, u_{ttt} , semejantes al término dispersivo de la ecuación. Tales errores pueden introducir dispersión numérica significativa deteriorando la precisión de la aproximación final. Para resolver esta dificultad, la idea fundamental es escribir la ecuación (1) de manera conveniente, como una ecuación diferencial ordinaria en el tiempo la cual se discretiza usando un método del tipo predictor-corrector que combina esquemas de tercer y cuarto orden. Las derivadas de primer orden en el espacio se discretizan a cuarto orden. Esta estrategia tomada del trabajo de Wei y Kirby [10], elimina automáticamente los errores de truncamiento de la misma forma que el término dispersivo en el modelo BBM.

Para verificar algunas propiedades del esquema numérico, tales como la estabilidad, la precisión y la convergencia, usamos algunas soluciones exactas de la ecuación BBM. Presentamos varios experimentos numéricos para diferentes valores de los parámetros α y β . En todos los casos, encontramos que la aproximación reproduce con alta precisión la respectiva solución exacta del modelo. El esquema ha sido adaptado por el autor para explorar problemas de transmisión-reflección de ondas en una dimensión en medios aleatorios mediante sistemas del tipo Boussinesq con coeficientes variables [7], [8],[9].

Este trabajo está organizado como sigue. En la sección 2 se deduce una solución exacta de la ecuación (1) con $\alpha = 0$ usando la técnica de la transformada de Fourier. En la sección 3 encontramos una familia de

soluciones de onda solitaria para (1). La sección 4 describe con detalle el esquema numérico propuesto. Sus propiedades son analizadas en la sección 5, a través de un conjunto de experimentos numéricos en diferentes regímenes. Finalmente, las conclusiones se presentan en la sección 6.

2 Solución exacta en el caso lineal

Considere la linealización ($\alpha = 0$) de la ecuación (1)

$$u_t + u_x - \beta u_{\xi\xi t} = 0, \quad (4)$$

con la condición inicial (2). Aplicando la transformada de Fourier en ξ tenemos

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(k, t) &= -\frac{ikt}{1 + \beta k^2} \hat{u}(k, t), \\ \hat{u}(k, 0) &= \hat{f}(k), \end{aligned}$$

con solución

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-\frac{ikt}{1 + \beta k^2}}.$$

Usando el teorema de inversión de Fourier obtenemos finalmente

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-\frac{ikt}{1 + \beta k^2}} e^{ik\xi} dk. \quad (5)$$

Para computar la solución explícita $u(\xi, t)$ del problema linealizado, la integral en la ecuación (5) se aproxima usando el algoritmo FFT (Fast Fourier Transform) [5]. Hay una consecuencia importante que se puede deducir de la ecuación (5). Cuando $t \rightarrow \infty$ entonces

$$u(\xi, t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{(-kt + \beta t k^3)i} e^{ik\xi} dk,$$

lo cual implica que

$$u(\xi, t) \approx \frac{1}{(3t\beta)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}\left(\frac{\xi - t - y}{(3t\beta)^{1/3}}\right) f(y) dy. \quad (6)$$

Aquí $\text{Ai}(z)$ denota la función de Airy

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z\omega + \frac{1}{3}\omega^3)} d\omega.$$

La aproximación (6) indica que la amplitud de la solución $u(\xi, t)$ decrece como efecto de la dispersión β con un factor aproximadamente de $1/(3t\beta)^{1/3}$ cuando $t \rightarrow \infty$. También, como consecuencia de la convolución del pulso inicial f con la función de Airy, la solución se descompone en un pulso principal y una cola oscilatoria que se desarrolla progresivamente con el tiempo. La tasa de dispersión del pulso es también proporcional a la raíz cúbica del tiempo t y aumenta con el parámetro β .

3 Solución de onda solitaria para la ecuación BBM

Un equilibrio entre los órdenes del término dispersivo $\beta u_{\xi\xi t}$ y el término no lineal αuu_{ξ} en la ecuación (1) hace posible la existencia de soluciones que mantienen su forma para todo tiempo, esto es, que pueden escribirse la forma $u(\xi, t) = \phi(\xi - Ct)$ para alguna función ϕ . La constante C corresponde a la velocidad con que se propaga la onda. Este tipo de solución recibe el nombre de **solución de onda viajante**. En el caso en que ϕ satisface la condición adicional

$$\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \phi^{(n)}(\zeta) = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

la solución recibe el nombre de **onda solitaria** o simplemente **solitón**. Aquí el superíndice de ϕ denota la n -ésima derivada.

Si $u(\xi, t) = \phi(\xi - Ct)$ es una solución de onda solitaria para la ecuación (1) entonces ϕ debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria

$$-C\phi'(\zeta) + (1 + \alpha\phi(\zeta))\phi'(\zeta) + C\beta\phi'''(\zeta) = 0, \quad (8)$$

donde $\zeta = \xi - Ct$.

La ecuación anterior puede también escribirse como

$$(1 - C)\phi' + \frac{\alpha}{2}(\phi^2)' + C\beta\phi''' = 0. \quad (9)$$

Integrando la ecuación (9) se llega a

$$(1 - C)\phi + \frac{\alpha}{2}\phi^2 + C\beta\phi'' = 0. \quad (10)$$

Multiplicando la ecuación (10) por ϕ' y reescribiendo las derivadas se tiene

$$\left(\frac{1 - C}{2}\right)(\phi^2)' + \frac{\alpha}{6}(\phi^3)' + \frac{C\beta}{2}((\phi')^2)' = 0. \quad (11)$$

Integrando esta última ecuación tenemos

$$\frac{C\beta}{2}(\phi')^2 + \left(\frac{1 - C}{2}\right)\phi^2 + \frac{\alpha}{6}\phi^3 = 0. \quad (12)$$

La ecuación (12) tiene soluciones de la forma

$$u(\xi, t) = \phi(\xi - Ct) = \phi(\zeta) = A \operatorname{Sech}^2(B\zeta), \quad (13)$$

donde A, B son constantes que están determinadas de las propiedades del solitón (7). Sustituyendo (13) en la ecuación (12) obtenemos

$$\begin{aligned} 2C\beta A^2 B^2 \operatorname{Sech}^4(B\zeta) \operatorname{Tanh}^2(B\zeta) &+ \frac{(1-C)A^2}{2} \operatorname{Sech}^4(B\zeta) \\ &+ \frac{\alpha}{6} A^3 \operatorname{Sech}^6(B\zeta) = 0, \end{aligned}$$

la cual después de simplificación se convierte en

$$2C\beta B^2 \operatorname{Tanh}^2(B\zeta) + \frac{1-C}{2} + \frac{\alpha A}{6} \operatorname{Sech}^2(B\zeta) = 0. \quad (14)$$

Ahora tomando el límite $\xi \rightarrow \infty$ en la ecuación (14) se llega a

$$\frac{1-C}{2} + 2C\beta B^2 = 0,$$

de donde

$$B = \sqrt{\frac{C-1}{4C\beta}}.$$

Haciendo $\zeta = 0$ en la ecuación (14) se tiene

$$\frac{1-C}{2} + \frac{\alpha}{6} A = 0,$$

de donde $A = \frac{3(C-1)}{\alpha}$.

La velocidad C del solitón puede determinarse de una condición inicial tal como $\phi(0) = 1$. El resultado es $C = 1 + \frac{\alpha}{3}$.

4 El esquema numérico

En esta sección describiremos el esquema numérico que proponemos para resolver la ecuación (1). La estrategia es tomada del trabajo de Wei y Kirby [10] para un sistema del tipo Boussinesq bidireccional para ondas acuáticas.

En primer lugar, escribimos la ecuación (1) como

$$V_t = F(u), \quad (15)$$

donde

$$F(u) = -(1 + \alpha u)u_\xi, \quad (16)$$

y V es una variable intermedia definida por

$$V = u - \beta u_{\xi\xi}.$$

Aproximamos la solución de (15) usando un esquema del tipo predictor-corrector. El dominio espacio-tiempo $\xi \in [\xi_1, \xi_J]$, $t \geq 0$ es discretizado como $\xi_j = \xi_1 + (j-1)\Delta\xi$, $1 \leq j \leq J$ and $t_n = (n-1)\Delta t$, $1 \leq n \leq N$, respectivamente. Las constantes ξ_1 y ξ_J denotan las posiciones de los extremos del dominio computacional. Las discretizaciones de las variables u, V se denotarán por u_j^n, V_j^n . Como es bien conocido, los esquemas predictor-corrector combinan dos métodos numéricos. Primero un esquema explícito de Adams-Bashford de tercer orden se emplea para calcular una predicción de V y luego un esquema implícito Adams-Moulton de cuarto orden se aplica para obtener un valor corregido.

La etapa predictor explícita está dada por

$$V_j^{n+1} = V_j^n + \frac{\Delta t}{12}(23F_j^n - 16F_j^{n-1} + 5F_j^{n-2}), \quad (17)$$

donde los valores en los niveles $n-2$, $n-1$, n son conocidos. Además, usamos la notación $F_j^n = F(u_j^n)$. Hacemos las siguientes observaciones sobre este paso:

La derivada de primer orden u_ξ (en la ecuación (16)) se aproxima mediante la fórmula de cuarto orden

$$u_\xi(\xi_j) \approx \frac{8(u_{j+1} - u_{j-1}) + u_{j-2} - u_{j+2}}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi^4), \quad (18)$$

en puntos interiores tales que $3 \leq j \leq J-2$. En puntos de frontera usamos las aproximaciones de cuarto orden

$$\begin{aligned} u_\xi(\xi_1) &\approx \frac{-3u_5 + 16u_4 - 36u_3 + 48u_2 - 25u_1}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi^4), \\ u_\xi(\xi_2) &\approx \frac{u_5 - 6u_4 + 18u_3 - 10u_2 - 3u_1}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi^4), \\ u_\xi(\xi_{J-1}) &\approx \frac{3u_J + 10u_{J-1} - 18u_{J-2} + 6u_{J-3} - u_{J-4}}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi^4), \\ u_\xi(\xi_J) &\approx \frac{25u_J - 48u_{J-1} + 36u_{J-2} - 16u_{J-3} + 3u_{J-4}}{12\Delta\xi} + O(\Delta\xi^4). \end{aligned}$$

Note que para evaluar la elevación de la onda u_j^{n+1} , debe resolverse la ecuación diferencial ordinaria (en el espacio)

$$u - \beta u_{\xi\xi} = V, \quad (19)$$

la cual es forzada por el término V el cual es conocido. La ecuación anterior da lugar a un problema del tipo Sturm-Liouville lo cual es típico en el análisis de ecuaciones del tipo KdV. La solución está dada por

$$u(\xi, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{\frac{1}{\beta}}|x-s|} V(s, t) ds. \quad (20)$$

Sin embargo, para un cálculo numérico más eficiente, en lugar de computar la convolución en la fórmula (20), la ecuación (19) se discretiza directamente por la aproximación de segundo orden

$$u_j^{n+1} - \beta \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta\xi^2} \right) = V_j^{n+1},$$

para $2 \leq j \leq J - 1$.

Para computar los valores de frontera u_1^{n+1} , u_J^{n+1} , η_1^{n+1} and η_J^{n+1} en el nivel $n + 1$ usamos las condiciones de radiación (B. Engquist y A. Majda [6])

$$\begin{aligned} u_t - u_\xi &= 0, & \text{en } \xi = \xi_1, \\ u_t + u_\xi &= 0, & \text{en } \xi = \xi_J. \end{aligned} \quad (21)$$

El propósito de estas condiciones es absorber las ondas que llegan a los extremos del dominio computacional. Por lo tanto, el canal computacional no tiene que ser tan largo. Esto ahorra tiempo de computación porque se necesitan menos nodos en la discretización.

En conclusión, para pasar de la variable intermedia V a la elevación del fluido u , debe resolverse un sistema tridiagonal de dimensión $(J - 2) \times (J - 2)$ donde la matriz del sistema tiene la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi^2 + 2\beta & -\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta & \Delta\xi^2 + 2\beta & -\beta & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & -\beta & \Delta\xi^2 + 2\beta & -\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & -\beta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta & \Delta\xi^2 + 2\beta \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Notamos que para resolver este sistema lineal sólo es necesario aplicar una descomposición LU en el punto de partida. Esta descomposición puede almacenarse para usarse en cada paso de tiempo.

Una vez que se computan las predicciones de los valores de u_j^{n+1} , el campo F_j^{n+1} se obtiene de la ecuación (16). Los valores corregidos se calculan mediante el esquema implícito

$$V_j^{n+1} = V_j^n + \frac{\Delta t}{24}(9F_j^{n+1} + 19F_j^n - 5F_j^{n-1} + F_j^{n-2}), \quad (23)$$

donde las cantidades en el nivel $n + 1$ se computan por iteración usando los valores obtenidos en la etapa predictor como valores iniciales. La elevación de la onda u_j^{n+1} se calcula de V_j^{n+1} usando la ecuación (19) como en el paso predictor. El proceso iterativo se detiene cuando el error relativo entre dos valores sucesivos del corrector u^{n+1} y $u^{(n+1)*}$ satisface

$$\Delta u^{n+1} = \frac{\sum_j |u_j^{n+1} - u_j^{(n+1)*}|}{\sum_j |u_j^{n+1}|} < tol.$$

En los experimentos numéricos una tolerancia de $tol = 0.001$ se consigue con sólo una iteración. Note que al menos tres niveles de tiempo tienen que ser conocidos para inicializar el esquema. Para esta tarea emplearemos el método de Runge-Kutta de cuarto orden dado por

$$V^{n+1} = V^n + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (24)$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= F(u^n), \\ K_2 &= F(u^n + (1/2)\Delta t K_1), \\ K_3 &= F(u^n + (1/2)\Delta t K_2), \\ K_4 &= F(u^n + \Delta t K_3), \end{aligned}$$

y

$$V^n = (V_1^n, V_2^n, \dots, V_j^n), u^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_j^n).$$

Puesto que solamente un sistema lineal tiene que resolverse en cada iteración encontramos que el esquema presentado es muy eficiente y barato. Fue implementado usando el paquete MATLAB 6.0 donde tenemos a la mano rutinas vectorizadas para tratar matrices esparsas de gran tamaño. Además, su costo computacional crece aproximadamente de manera lineal con los tamaños de las mallas espacial o temporal.

5 Experimentos numéricos

En esta sección presentamos un conjunto de simulaciones numéricas usando el esquema descrito en la sección 4. El objetivo es evaluar el desempeño del esquema numérico en diferentes regímenes, i.e., para distintos valores de los parámetros de no linealidad α y de dispersión β . Para este fin empleamos la solución de onda solitaria (13) y la solución explícita (5) en el caso lineal obtenidas en las secciones 2 y 3.

5.1 Régimen lineal ($\alpha = 0$), débilmente dispersivo ($0 < \beta \ll 1$)

En el primer experimento tomamos un valor de dispersión pequeño $\beta = 0.002$. El pulso inicial (en $t = 0$) es una gaussiana con amplitud uno de la forma

$$u(\xi, 0) = f(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{\epsilon}}, \quad (25)$$

donde el parámetro $\epsilon > 0$ controla la longitud del soporte efectivo de la gaussiana. Aquí tomamos $\epsilon = 0.3$. En la figura 1 comprobamos que la solución numérica en el tiempo $t = 40$ coincide con la solución exacta (5) en el intervalo $[20, 50]$. Los parámetros numéricos son $J = N = 2500$ y el dominio computacional es $[-5, 50]$. Las oscilaciones en el intervalo $[30, 38]$ son debidas al término dispersivo $\beta u_{\xi\xi t}$ presente en la ecuación BBM (c.f. ecuación (6)). Encontramos que el esquema numérico modela muy bien las características dispersivas de la ecuación. Además, damos evidencia de la estabilidad del esquema, i.e., que la solución numérica mantiene su precisión en intervalos largos de tiempo. Las condiciones de radiación (21) absorben eficientemente las ondas que salen a través de las fronteras del dominio computacional y controlan las reflexiones producidas por las mismas.

En la figura 2 aumentamos el parámetro de dispersión a $\beta = 0.02$. Observe que la gaussiana se dispersa más rápidamente. En efecto, en $t = 20$ la cola oscilatoria que sigue el pulso principal es más extensa que en el experimento anterior y la amplitud inicial del pulso ha disminuido aproximadamente en un 50 % (compare con la onda en la figura 1). En la sección 2 establecimos que la amplitud del frente de onda decae aproximadamente como $1/(3t\beta)^{1/3}$ cuando $t \rightarrow \infty$ (c.f. ecuación (6)). Esto es consistente con los resultados que hemos obtenido.

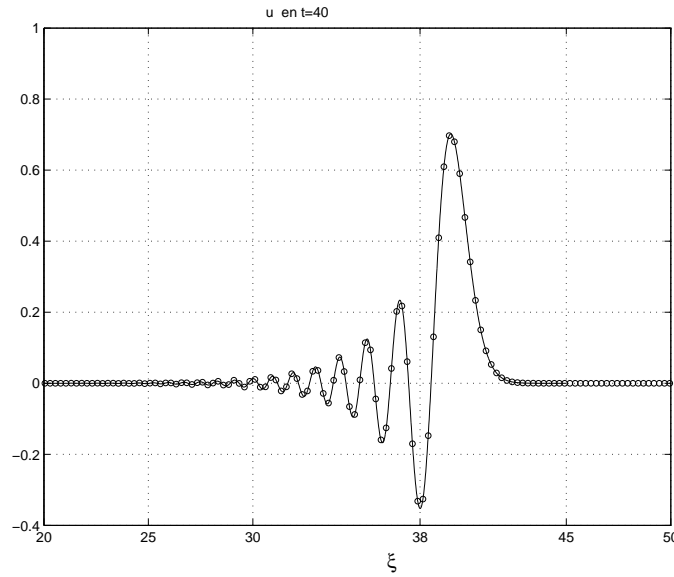


Figura 1: Elevación de la onda $u(\xi, t)$ según la ecuación BBM en $t = 40$. Línea continua: solución numérica. Puntos : solución exacta (5). Parámetros del modelo: $\alpha = 0$, $\beta = 0.002$. Este pequeño valor de β es suficiente para afectar la forma de la gaussiana inicial.

5.2 Régimen débilmente no lineal ($0 < \alpha \ll 1$), débilmente dispersivo ($0 < \beta \ll 1$)

En la anterior sección todos los experimentos se dan en el régimen lineal. En lo que sigue consideramos efectos no lineales en la ecuación BBM. La perturbación inicial es de nuevo una gaussiana de la forma (25). Como se espera, conforme el parámetro α aumenta, la solución no lineal se desvía de la solución (5). En la figura 3 comparamos la solución numérica no lineal para $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.002$ con la solución (5) para el mismo valor de dispersión. Este experimento proporciona evidencia numérica de que la presencia del término no lineal altera el mecanismo de dispersión lineal de la ecuación BBM. Como consecuencia, la amplitud del pulso decrece más lentamente y la cola dispersiva que sigue al pulso principal tarda más tiempo en desarrollarse.

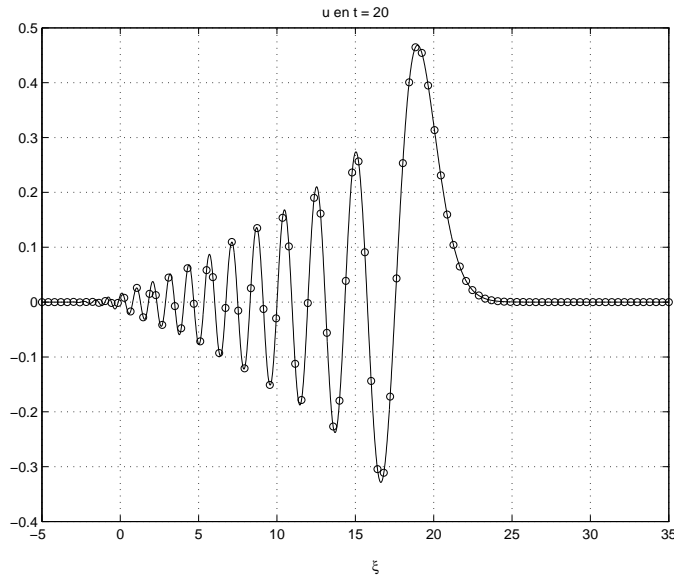


Figura 2: Elevación de la onda $u(\xi, t)$ en $t = 20$. Línea continua: solución numérica. Puntos: solución exacta (5). Parámetros del modelo: $\alpha = 0$, $\beta = 0.02$.

5.3 Ondas solitarias

En esta sección analizamos la capacidad del esquema numérico para describir efectos conjuntos de dispersión y no linealidad en el modelo BBM. En particular estamos interesados en las soluciones de onda solitaria encontradas en la sección 3. Para confirmar la precisión del esquema realizamos una serie de experimentos tomando $\Delta t = 0.001$ (tamaño paso tiempo) fijo y $\Delta \xi = 60/2^k$ (tamaño paso espacio), alternativamente usando $k = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$. Medimos en cada caso el error relativo $\|u_e - u_{num}\|_\infty / \|u_e\|_\infty$ entre la onda solitaria exacta u_e en (13) y la correspondiente solución numérica u_{num} . Los resultados se muestran en la tabla 1. Allí también se incluyen los tiempos de computación en MATLAB 6.0 de cada simulación. Como se puede ver, el costo computacional aproximadamente se duplica cuando el número de nodos en el espacio se duplica. Los valores de los parámetros del modelo son $\alpha = \beta = 0.03$. Los errores disminuyen cuando se refina la malla espacial lo cual muestra la convergencia en este caso de la solución numérica a la solución exacta. En el próximo experimento, en la figura 4 superponemos la onda solitaria exacta para la ecuación BBM dada en (13), con la simulación numérica no

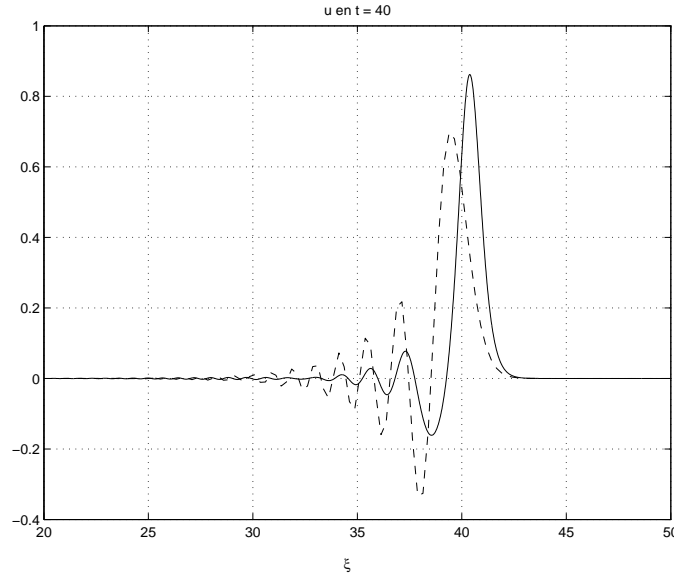


Figura 3: Elevación de la onda $u(\xi, t)$ en $t = 40$. Línea continua: solución numérica para $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.002$. Línea punteada: solución exacta (5) para $\alpha = 0$ y $\beta = 0.002$.

lineal en $t = 40$ para $\alpha = \beta = 0.03$. En este caso, la perturbación inicial es $f(\xi) = A \operatorname{sech}^2(B\xi)$, donde las constantes A y B fueron definidas en la sección 3. Los parámetros numéricos son $J = 2500$ $N = 2000$ y el dominio computacional es el intervalo $[-15, 60]$. Observe que estas soluciones coinciden con alta precisión. En particular, no se observa disipación numérica en la solución obtenida, la cual conserva su forma y se propaga con velocidad aproximadamente constante $C \approx 1.01$. Como indicamos antes, la presencia de los términos no lineal y dispersivo en el modelo BBM es lo que hace posible que existan soluciones de onda solitaria. Corroboramos este aspecto en figura 5 donde presentamos la solución numérica en $t = 40$ con $\beta = 0$. Como perturbación inicial tomamos la onda solitaria (13) con $\alpha = \beta = 0.07$. Observe que en este caso la solución no mantiene su forma y se inclina hacia adelante. La razón es que la velocidad de las partículas que están en la cresta de la onda es mayor que aquellas próximas a su base. Si la situación persiste, en tiempo finito la solución deja de existir en el sentido clásico y se forma un choque. Esto ya era esperado debido a que la ecuación BBM sin dispersión ($\beta = 0$) se convierte en la ecuación de Burgers en una dimensión.

k	Error relativo	Tiempo de cómputo (seg)
7	2.1e-4	1.2
8	7e-6	1.8
9	5.6e-6	2.8
10	1.6e-6	5.2
11	4.2e-7	9.5
12	1.1e-7	19.3
13	9e-8	43.0

Tabla 1: Error relativo $\|u_e - u_{num}\|_\infty / \|u_e\|_\infty$ entre la solución exacta u_e en (13) y la solución numérica u_{num} .

6 Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado numéricamente las soluciones de la ecuación BBM a través de un esquema de diferencias finitas de alta precisión. La discretización en el tiempo combina una etapa predictor explícita de tercer orden y un esquema corrector implícito de cuarto orden. Las derivadas de primer orden en el espacio se discretizan a cuarto orden. La capacidad del esquema propuesto para modelar soluciones de un modelo dispersivo tal como la ecuación BBM fue puesta a prueba a través de varios experimentos numéricos para diferentes valores de los parámetros de interés. Se dió evidencia numérica de la estabilidad, precisión y convergencia de la solución numérica en el régimen lineal usando la solución exacta (5) y en el régimen débilmente no lineal, débilmente dispersivo empleando la solución de onda solitaria (13). No se observó disipación numérica ni reflexiones provenientes de las fronteras del dominio computacional. Esto indica que las condiciones de radiación (21) funcionan correctamente. El esquema puede ser adaptado para resolver otras ecuaciones que tengan términos dispersivos de la forma $u_{\xi\xi t}$. El código es flexible y con pequeños ajustes pueden implementarse también condiciones de frontera periódicas o condiciones apropiadas para modelar ondas en un canal finito de extremos L_1, L_2 , tales como $u(L_1, t) = f(t)$, $u(L_2, t) = g(t)$.

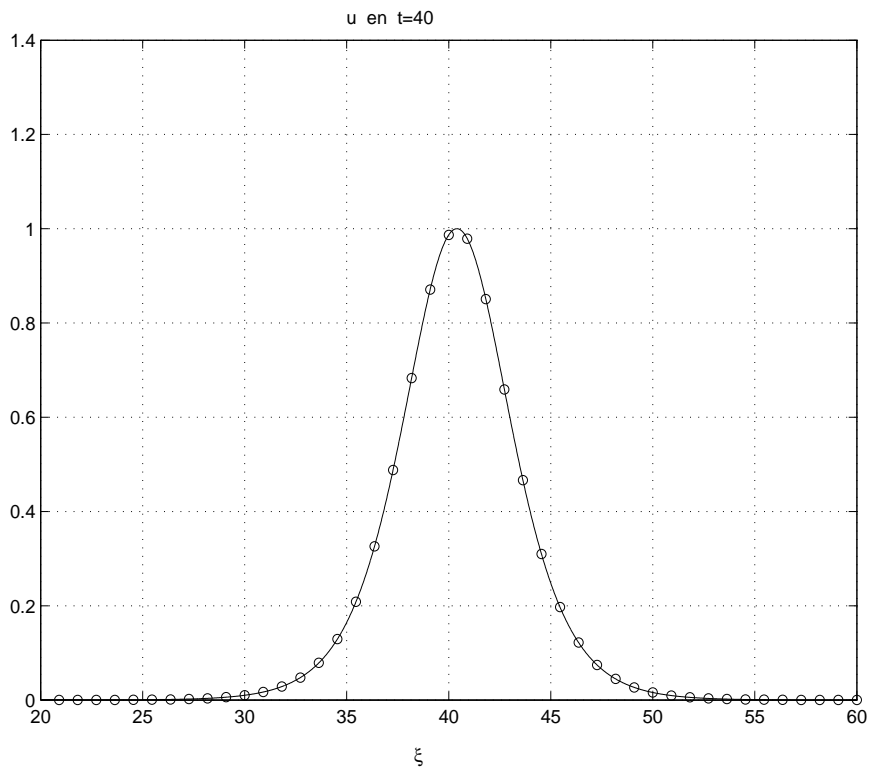


Figura 4: Onda solitaria de la ecuación BBM en $t = 40$. Línea continua: solución numérica. Puntos: solución exacta (13). Parámetros del modelo: $\alpha = 0.03$, $\beta = 0.03$.

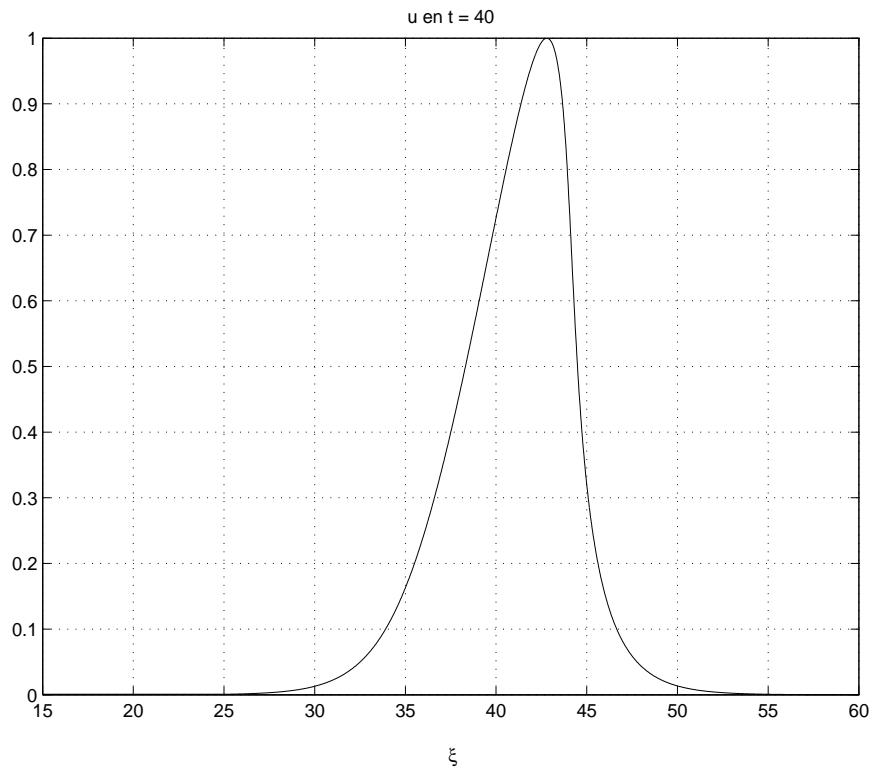


Figura 5: La onda solitaria inicial (13) no mantiene su forma en ausencia de dispersión ($\beta = 0$) en el modelo BBM. Los parámetros restantes del modelo son: $\alpha = 0.07$ y $t = 40$.

Referencias

- [1] T.B. Benjamin. The stability of solitary waves. *Proc. Royal Soc. London* A 338, pp. 153-183, 1972.
- [2] T.B. Benjamin, J.L. Bona, J.J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* 272, no. 1220, pp. 47-78, 1972.
- [3] J.L. Bona. On the stability theory of solitary waves. *Proc. Royal Soc. London* A 344, pp. 363-374, 1975.
- [4] J.L. Bona, W.G. Pritchard, L.R. Scott. A comparison of solutions of two model equations for long waves. *Lectures in Applied Mathematics* vol. 20, pp. 235-267, 1983.
- [5] E.O. Brigham. *The Fast Fourier Transform and its Applications*. Prentice Hall, 1988.
- [6] B. Engquist, A. Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.* 31 (139), pp. 629-651, 1977.
- [7] J.C. Muñoz Grajales, A. Nachbin. *Dispersive wave attenuation and refocusing due to disordered orographic forcing*, por aparecer en SIAM J. Appl. Math., 2003.
- [8] J.C. Muñoz Grajales, A. Nachbin. *Stiff microscale forcing and solitary wave refocusing*, sometido para publicación SIAM Multiscale Modeling and Simulation, 2003.
- [9] J.C. Muñoz Grajales, A. Nachbin. *A new set of Boussinesq equations for variable depth*. En preparación
- [10] G. Wei, J. Kirby. Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations. *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, vol. 121, No. 5, pp. 251-261, 1995.

Dirección del autor: Juan Carlos Muñoz Universidad del Valle, A.A. 25360, Cali, Colombia, jcarlmz@yahoo.com

Los espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}(E)$

Jairo Villegas G

Resumen

En este trabajo se extienden al marco vectorial algunos resultados de Björck sobre espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}$ utilizando la teoría de ultradistribuciones de Beurling.

Palabras y frases claves: Espacio de Hörmander, ultradistribución, espacio de Fréchet, transformada de Fourier.

1 Introducción

Se sabe de la importancia de los espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}$ en la teoría de operadores diferenciales parciales lineales (ver [6], [7]). De igual manera, en [2] Björck, utilizando ultradistribuciones de Beurling, estudia problemas de existencia, aproximación y regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales lineales con coeficientes constantes en espacios más generales que los de Hörmander. En este trabajo definimos los espacios de Hörmander con valores vectoriales vía la teoría de ultradistribuciones de Beurling e introducimos algunas propiedades de dichos espacios pero en el marco vectorial. Para ello, utilizaremos conceptos de la teoría de espacios localmente convexos. Para definiciones y propiedades ver [8], [11] y [13].

A continuación presentamos alguna terminología usada en este trabajo. Los espacios vectoriales usados en este artículo están definidos sobre el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos. Si E es un espacio localmente convexo, denotamos por E' su dual topológico. Dados dos espacios localmente convexos E y F , $\mathcal{L}_b(E, F)$ denota el espacio de los operadores lineales y continuos de E en F , provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos acotados de E ; cuando $E = F$ escribimos $\mathcal{L}_b(E)$ y si $F = \mathbb{C}$ ponemos E'_b . Por $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ denotamos la completación del producto tensorial inyectivo de E y F . Si E es un espacio localmente convexo, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$ denota el espacio de las funciones continuas de \mathbb{R}^n en E , equipado de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de \mathbb{R}^n . Si $E = \mathbb{C}$ escribimos $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. \overline{B}_1 denota la

bola unitaria cerrada y $B_t(x)$ a la bola abierta de centro en x y radio t ($t > 0$).

Finalmente, si u es una función compleja en \mathbb{R}^n y $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_x u$ y \tilde{u} serán las funciones definidas por $(\tau_x u)(t) = u(t - x)$, $\tilde{u}(t) = u(-t)$ para $t \in \mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, e_x denota la función $e_x(t) = e^{ixt}$, $t \in \mathbb{R}^n$, donde $xt = \sum_{j=1}^n x_j t_j$ es el producto escalar usual de \mathbb{R}^n . Si $u \in L_1$ entonces la transformada de Fourier de u , \hat{u} o $\mathcal{F}u$, es definida por $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\xi x} dx$. Para definiciones y resultados sobre espacios de funciones diferenciables y distribuciones con valores vectoriales, nos remitimos a [14] y [15].

2 Preliminares

En esta sección extendemos al marco vectorial algunos resultados de Björck (ver [2]) sobre ultradistribuciones de Beurling. Tratamientos bastante exhaustivos sobre la teoría de ultradistribuciones (incluyendo las de Beurling) pueden encontrarse en [1], [2], [3], [4], [9] y [10]. Nuestra notación sigue el trabajo de [2].

Sea \mathcal{M} el conjunto de todas las funciones reales continuas $\omega(x)$ sobre \mathbb{R}^n tales que para cada una de ellas existe una función $\sigma(t)$ que verifica $\omega(x) = \sigma(|x|)$ donde $\sigma(t)$ es una función cóncava, continua y creciente sobre $[0, \infty[$ con las siguientes propiedades: (i) $\sigma(0) = 0$, (ii) $\int_0^\infty \frac{\sigma(t)}{1+t^2} dt < \infty$ (condición de Beurling), (iii) existe un número real a y un número $b > 0$ tales $\sigma(t) \geq a + b \log(1+t)$ para $t \geq 0$. La propiedad más importante es la (ii), que es esencialmente la condición de no cuasi-analiticidad de Denjoy-Carleman (ver la Sección 1.5 de [2]). Dos de los ejemplos más importantes de funciones de \mathcal{M} son $\omega(x) = \log(1+|x|)^d$ con $d > 0$ y $\omega(x) = |x|^\beta$ con $0 < \beta < 1$. Cada función $\omega \in \mathcal{M}$ es subaditiva.

Si $\omega \in \mathcal{M}$, entonces \mathcal{K}_ω es el conjunto de todas las funciones positivas k sobre \mathbb{R}^n para la que existe una constante $\lambda > 0$ tal que $k(x+y) \leq e^{\lambda\omega(x)} k(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $k, k_1, k_2 \in \mathcal{K}_\omega$ y s es un número real entonces $\log k$ es uniformemente continua, $k^s \in \mathcal{K}_\omega$, $k_1 k_2 \in \mathcal{K}_\omega$ y $M_k(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{k(x+y)}{k(y)} \in \mathcal{K}_\omega$ (ver [2, Th.2.1.3]).

Definición 1. Sean E un espacio de Banach, $p \in [1, \infty]$, $\omega \in \mathcal{M}$ y $k \in \mathcal{K}_\omega$. $L_{p,k}(E)$ denota el conjunto de todas las funciones f medibles Bochner de \mathbb{R}^n en E , tales que $kf \in L_p(E)$, donde $L_p(E)$ es el conjunto de todas las funciones (clases de funciones equivalentes) medibles Bochner

de \mathbb{R}^n en E , tales que $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} < \infty$.

(Si $p = \infty$ se supone $\text{ess sup } \|f(x)\|_E < \infty$).

Como es bien conocido los espacios $L_p(E)$, equipados con la norma $\|\cdot\|_p$ son espacios de Banach. Definiendo $\|f\|_{L_{p,k}(E)} = \|kf\|_p$ para $f \in L_{p,k}(E)$, resulta que $L_{p,k}(E)$ es un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $L_p(E)$. Denotamos por $L_1^{loc}(E)$ el conjunto de todas las funciones medibles Bochner de \mathbb{R}^n en E , tales que $\int_K \|f(x)\|_E dx < \infty$, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Si $f \in L_1(E)$ la transformada de Fourier de f , \hat{f} o $\mathcal{F}f$, es definida por $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-itx} dx$.

En la definición que sigue extendemos al caso vectorial las definiciones 1.3.1, 1.3.2 y 1.8.1 de [2].

Definición 2. Si $\omega \in \mathcal{M}$ y E es un espacio de Banach, $\mathcal{D}_\omega(E)$ denota el conjunto de todas las funciones $\varphi \in L_1(E)$ con soporte compacto tales que para cada $\lambda > 0$ se tiene $\|\varphi\|_\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \|\hat{\varphi}(x)\|_E e^{\lambda\omega(x)} dx < \infty$, donde $\hat{\varphi}(x)$ es la transformada de Fourier de φ .

Por otra parte, $\mathcal{S}_\omega(E)$ es el conjunto de todas las funciones $\varphi \in L_1(E)$ tales que φ y $\hat{\varphi}$ son funciones de clase C^∞ sobre \mathbb{R}^n y

$$\vec{p}_{\alpha,\lambda}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} e^{\lambda\omega(x)} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_E < \infty$$

$$\vec{q}_{\alpha,\lambda}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} e^{\lambda\omega(x)} \|\partial^\alpha \hat{\varphi}(x)\|_E < \infty$$

para todo multiíndice α y todo $\lambda > 0$.

Si Ω es un subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces

$$\mathcal{D}_\omega(\Omega, E) = \{\varphi \in \mathcal{D}_\omega(E) : \text{sop}\varphi \subset \Omega\}.$$

Si Ω es un compacto entonces $\mathcal{D}_\omega(\Omega, E)$ equipado con la familia de normas $\{\|\cdot\|_\lambda : \lambda > 0\}$ llega a ser un espacio de Fréchet. Si Ω es un abierto y $\{K_j\}_1^\infty$ es una sucesión fundamental de compactos de Ω , entonces $\mathcal{D}_\omega(\Omega, E) = \varinjlim_j \mathcal{D}_\omega(K_j, E)$ y es un LF-estricto (para la definición de

límite inductivo y de espacio LF-estricto ver p.e. [13]).

De igual manera, $\mathcal{S}_\omega(E)$ equipado de la topología localmente convexa generada por las seminormas $\vec{p}_{\alpha,\lambda}, \vec{q}_{\alpha,\lambda}$ ($\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \lambda > 0$) es un espacio de Fréchet y la transformada de Fourier es un automorfismo topológico de $\mathcal{S}_\omega(E)$.

Observación 3. 1. Si $E = \mathbb{C}$ entonces $\mathcal{D}_\omega(E)$ y $\mathcal{S}_\omega(E)$ coinciden con los espacios usuales \mathcal{D}_ω y \mathcal{S}_ω . En este caso escribimos $p_{\alpha,\lambda}$ y $q_{\alpha,\lambda}$ en lugar de $\vec{p}_{\alpha,\lambda}$ y $\vec{q}_{\alpha,\lambda}$, respectivamente.

2. Al igual que sucede en el caso escalar (ver [2, Cor. 1.3.21]) la condición $\omega(x) \geq a + b \log(1 + |x|)$, ($a \in \mathbb{R}$, $b > 0$) y la fórmula de inversión de Fourier, permiten demostrar que si $f \in \mathcal{D}_\omega(E)$ entonces f , modificándola si es necesario en un conjunto de medida cero, llega a ser indefinidamente diferenciable. Por tanto $\mathcal{D}_\omega(E) \subset \mathcal{D}(E)$.

En la siguiente proposición demostramos la completitud de los espacios de la definición anterior.

Proposición 4. *Sea K un compacto de \mathbb{R}^n , $\omega \in \mathcal{M}$ y E un espacio de Banach, entonces*

1. $(\mathcal{D}_\omega(K, E), \{\|\cdot\|_\lambda : \lambda > 0\})$ es un espacio de Fréchet,
2. $(\mathcal{S}_\omega(E), \{\vec{p}_{\alpha,\lambda}, \vec{q}_{\alpha,\lambda} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \lambda > 0\})$ es un espacio de Fréchet.

Demostración.

1. Para ver que el espacio $\mathcal{D}_\omega(K, E)$ es de Fréchet bastará probar su completitud.

Sea (h_j) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}_\omega(K, E)$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe j_0 tal que $\|h_j - h_s\|_m < \epsilon$, $j, s \geq j_0$, es decir, tal que

$$\begin{aligned} \|h_j - h_s\|_m &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\hat{h}_j(z) - \hat{h}_s(z)\|_E e^{m\omega(z)} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\hat{h}_j(z) - \hat{h}_s(z)\|_E d\mu_m(z) < \epsilon, \quad j, s \geq j_0, \end{aligned}$$

siendo μ_m la medida definida por $d\mu_m(z) = e^{m\omega(z)} dz$. Por tanto para cada m , (\hat{h}_j) es de Cauchy en $L_1(\mu_m, E)$. De este modo, para todo m existe una función $f_m \in L_1(\mu_m, E)$ tal que $\hat{h}_j \xrightarrow{j} f_m$, en $L_1(\mu_m, E)$ y de las inclusiones continuas $\cdots \hookrightarrow L_1(\mu_m, E) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow L_1(\mu_2, E) \hookrightarrow L_1(\mu_1, E) \hookrightarrow L_1(E)$ se deduce que $f_1 = f_2 = f_3 = \cdots$. Llamando f a esa función vemos que $f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} L_1(\mu_m, E)$

y que también $\hat{h}_j \rightarrow f$ en $L_1(E)$. Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier es un operador continuo de $L_1(E)$ en $\mathcal{C}_0(E)$ resulta que $\hat{h}_j = (2\pi)^n \tilde{h}_j \rightarrow \hat{f}$ en $\mathcal{C}_0(E)$, es decir, $h_j \rightarrow (2\pi)^{-n} \tilde{\hat{f}}$ en $\mathcal{C}_0(E)$. Finalmente, si $g = (2\pi)^{-n} \tilde{\hat{f}}$ entonces $g \in \mathcal{D}_\omega(K, E)$

y $h_j \rightarrow g$ en $\mathcal{D}_\omega(K, E)$. Puesto que $\text{sop} h_j \subset K$, para cada j , es claro que $\text{sop} g \subset K$. Además $\hat{g} = f$ c.p.p. pues $\hat{g}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-z) e^{-ix.z} dz = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(z) e^{ix.z} dz = f(x)$ para casi todo x (en el último paso hemos aplicado la fórmula de inversión de Fourier ya que f y \hat{f} están en $L_1(E)$). Por consiguiente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\hat{g}(x)\|_E e^{m\omega(x)} d\mu_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E e^{m\omega(x)} d\mu_m(x) < \infty,$$

para cada entero positivo m , ya que $f \in L_1(\mu_m, E)$ para todo m . Que la sucesión (h_j) tiende a g en $\mathcal{D}_\omega(K, E)$ se deduce de las igualdades $\|h_j - g\|_m = \|\hat{h}_j - f\|_{L_1(\mu_m, E)}$, $m = 1, 2, \dots$.

2. La prueba de 2 se deduce de la inmersión $\mathcal{S}_\omega(E) \hookrightarrow \mathcal{S}(E)$, del hecho de que $\mathcal{S}(E)$ es un espacio de Fréchet (ver p.e., [14]) y de la continuidad de la transformación de Fourier.

□

La siguiente definición es la extensión al caso vectorial de las definiciones 1.8.8 y 1.8.9 de [2].

Definición 5. Sean $\omega \in \mathcal{M}$ y E un espacio de Banach. Una aplicación lineal y continua de \mathcal{S}_ω en E se llama una *ultradistribución* (ω -temperada) con valores en E . El espacio de todas las ultradistribuciones con valores en E se denota por $\mathcal{S}'_\omega(E)$ y está equipado con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de \mathcal{S}_ω .

Si $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$ se define la transformada de Fourier $\hat{T} \in \mathcal{S}'_\omega(E)$ por $\langle u, \hat{T} \rangle = \langle \hat{u}, T \rangle$, para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$.

\hat{T} es un automorfismo topológico de $\mathcal{S}'_\omega(E)$.

El siguiente lema lo demostramos por motivos de completitud.

Lema 6. Sea $f \in L_1^{loc}(E)$ y sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n tal que

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(\Omega)$. Entonces $f = 0$ c.p.p. en Ω .

Demostración. Primero supongamos que f es escalar. En virtud del teorema de Lebesgue se sabe que, para casi todo x ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} \int_{B_t(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Sea entonces $\varphi \in \mathcal{D}_\omega$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ y $\text{sop} \varphi \subset \overline{B}_1$ (Lema 1.3.9 de [2]). Sea $x \in \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy \\ &= \int_{B_t(x)} [f(y) - f(x)] t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy + \\ &\quad \int_{\Omega} f(y) t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy \quad (*) \end{aligned}$$

Si t es lo suficientemente pequeño, $t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \in \mathcal{D}_\omega$ y $\text{sop} t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \subset B_t(x) \subset \Omega$, por lo que $\int_{\Omega} f(y) t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy = 0$. Si $x \in \Omega$, es tal que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} \int_{B_t(x)} |f(y) - f(x)| dy$ resulta que $f(x) = 0$ (basta hacer tender t a 0^+ en (*)).

Veamos ahora el caso vectorial. Para cada $e' \in E'$ se tiene que $e' \circ f \in L_1^{loc}(E)$ y $\int_{\Omega} e' \circ f(x) \varphi(x) dx = 0$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}_\omega$. Por tanto, $e' \circ f = 0$ c.p.p. en Ω , para cada $e' \in E'$. Sabemos (ver [5, Cor.7, p.48]) que esto implica $f = 0$ c.p.p. en Ω . \square

El siguiente resultado extiende al caso vectorial resultados de inmersión escalar (ver [2]).

Proposición 7. Sean $\omega \in \mathcal{M}$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p \leq \infty$ y E un espacio de Banach. Entonces

1. La aplicación $\xi : L_{p,k}(E) \longrightarrow \mathcal{S}'_\omega(E)$ definida por

$$\langle u, \xi(f) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx$$

para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$, está bien definida, es lineal, inyectiva y continua.

2. La aplicación $\eta : \mathcal{S}_\omega(E) \longrightarrow L_{p,k}(E)$ que a cada $f \in \mathcal{S}_\omega(E)$ hace corresponder su clase de equivalencia es lineal, inyectiva y continua.

Demostración. 1. Sea $u \in \mathcal{S}_\omega$ y $f \in L_{p,k}(E)$, entonces uf es medible Bochner. Si $1 < p < \infty$ y p' es el exponente conjugado de p , se tiene, en virtud de la desigualdad de Hölder y de las estimaciones $\frac{1}{k(x)} \leq ce^{\lambda\omega(x)}$,

$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\beta p' \omega(x)} dx < \infty$ (c, λ y β son ciertas constantes mayores que cero; recuérdese que $\frac{1}{k} \in \mathcal{K}_\omega$ y que $\omega(x) \geq a + b \log(1 + |x|)$ con $b > 0$), que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|u(x) f(x)\|_E dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|k(x) f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|u(x)|}{k(x)} \right)^{p'} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq \|kf\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} [c |u(x)| e^{(\lambda+\beta)\omega(x)}]^{p'} e^{-\beta p' \omega(x)} dx \right)^{1/p'} \\ &= cp_{0,\lambda+\beta}(u) \|kf\|_p. \end{aligned}$$

De modo que $\int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx$ es un elemento bien determinado de E y además $\|\langle u, \xi(f) \rangle\|_E \leq cp_{0,\lambda+\beta}(u) \|kf\|_p$ por lo que $\xi(f) \in \mathcal{S}'_\omega(E)$. Obviamente, la aplicación $\xi(f)$ es lineal. De otro lado, para cada acotado $B \subset \mathcal{S}_\omega$ tenemos

$$\|\xi(f)\|_B = \sup_{u \in B} \|\langle u, \xi(f) \rangle\|_E \leq c \|kf\|_p \sup_{u \in B} p_{0,\lambda+\beta}(u)$$

de lo cual resulta que ξ es continua. Resta probar que ξ es inyectiva. Para ello, supongamos que $\xi(f) = 0$, entonces para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$ tenemos $\int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx = 0$, puesto que $\mathcal{D}_\omega \subset \mathcal{S}_\omega$ (ver [2, Prop.1.8.6]) y $f \in L_1^{loc}(E)$, el lema anterior prueba entonces que $f = 0$ c.p.p. Por tanto, ξ es inyectiva. (En los casos $p = 1, \infty$ se razona análogamente haciendo las modificaciones necesarias.)

2. Si $f \in \mathcal{S}_\omega(E)$, entonces $kf \in L_p(E)$. En efecto, kf es continua y por tanto medible Bochner. Si $1 \leq p < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|k(x) f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} [k(x)]^p \|f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} [e^{\lambda\omega(x)} \|f(x)\|_E]^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\beta p \omega(x)} dx \right)^{1/p} \vec{p}_{0,\lambda+\beta}(f) \end{aligned}$$

para ciertos λ y β positivos, luego $kf \in L_p(E)$. Estas desigualdades prueban que la aplicación η , que obviamente es lineal e inyectiva, es continua. Si $p = \infty$ se tiene que $\|kf\|_\infty \leq c \vec{p}_{0,\lambda}(f)$ y esto termina la prueba. \square

3 Los espacios $\mathcal{B}_{p,k}(E)$

Extendemos ahora al caso vectorial la definición de los espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}^\omega$ (ver Definición 2.2.1 de [6], Definición 2.2.1 y Proposición 2.2.2 de [2]; ver también la Definición 1 de [12])

Definición 8. Sean $\omega \in \mathcal{M}$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p \leq \infty$ y E un espacio de Banach. Denotamos por $\mathcal{B}_{p,k}(E)$ el conjunto de todas las ultradistribuciones vectoriales $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$ para las que existe alguna función $f \in L_{p,k}(E)$ tales que $\langle \hat{u}, T \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx$, para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$.

$\mathcal{B}_{p,k}(E)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{S}'_\omega(E)$ y la aplicación $\mathcal{B}_{p,k}(E) \rightarrow L_{p,k}(E) : T \mapsto f$ ($\xi(f) = \hat{T}$) es un isomorfismo algebraico (Sobreyectividad: si $g \in L_{p,k}(E)$ entonces $T = \mathcal{F}^{-1}(\xi(g)) \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$ es la antiimagen de g). Provisto de la norma

$$\|T\|_{p,k} = \begin{cases} \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \|k(x) \hat{T}(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} & \text{si } p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \|k(x) \hat{T}(x)\|_E & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

$\mathcal{B}_{p,k}(E)$ llega a ser un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $L_p(E)$. (Hemos puesto $\hat{T}(x)$ en lugar de $f(x)$. Cometeremos este abuso de notación frecuentemente).

Nota 9. 1. $\mathcal{B}_{p,k}(\mathbb{C})$ es el espacio de Hörmander-Beurling $\mathcal{B}_{p,k}$ considerado por Björck en [2]. Nuestra definición coincide con la Definición 1 de [12] cuando $\omega(x) = \log(1 + |x|)$.

2. El estudio de los espacios $\mathcal{B}_{p,k}(E)$ no se reduce al estudio de los espacios $\mathcal{B}_{p,k} \hat{\otimes}_\epsilon E$ puesto que, como es bien conocido, $L_p(E)$ y $L_p \hat{\otimes}_\epsilon E$ no son isomorfos en general. Por motivos de completitud recordamos algunos ejemplos: El espacio $L_1(\ell_p)$ no es isomorfo a $L_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ si $2 \leq p < \infty$ (ver [5, p.117 y Cor. p.258]). Si $\dim E = \infty$ y $1 < p < \infty$ entonces $L_p(E)$ no es isomorfo a $L_p \hat{\otimes}_\epsilon E$ (ver [5, p.253]).

En el siguiente teorema necesitamos algunos resultados sobre el producto (resp. la convolución) de funciones de \mathcal{S}_ω por ultradistribuciones de $\mathcal{S}'_\omega(E)$. Las definiciones son análogas a las dadas por Schwartz en [14] y las correspondientes propiedades se establecen a partir del caso escalar y del teorema de Hahn-Banach: Para $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$, $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$ y $\psi \in \mathcal{S}_\omega$, definimos $\langle \psi, \varphi T \rangle = \langle \psi \varphi, T \rangle$. La “multiplicación puntual” $\mathcal{S}_\omega \times \mathcal{S}'_\omega(E) \rightarrow$

$\mathcal{S}'_\omega(E) : (\varphi, T) \mapsto \varphi T$ es una aplicación bilinear separadamente continua y sucesionalmente continua. Si $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$ y $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$, definimos $\varphi * T(x) = \langle \tau_x \tilde{\varphi}, T \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$. La función $\varphi * T : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ se denomina la convolución de φ y T . Se tiene que $\varphi * T$ es continua y existen constantes positivas C y Λ tales que $\|\varphi * T(x)\|_E \leq C e^{\Lambda\omega(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, podemos identificar $\varphi * T$ con la ultradistribución ω -temperada con valores en E definida por $\psi \mapsto \langle \psi, \varphi * T \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) (\varphi * T)(x) dx$, $\psi \in \mathcal{S}_\omega$. La aplicación bilinear $\mathcal{S}_\omega \times \mathcal{S}'_\omega(E) \rightarrow \mathcal{S}'_\omega(E) : (\varphi, T) \mapsto \varphi * T$ es separadamente continua y sucesionalmente continua. Se comprueba fácilmente que $\langle \psi, \varphi * T \rangle = \langle \tilde{\varphi} * \psi, T \rangle$, $\widehat{\varphi * T} = \hat{\varphi} \hat{T}$, $\widehat{\varphi T} = (2\pi)^{-n} (\hat{\varphi} * \hat{T})$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_\omega$ y $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$.

En el siguiente teorema extendemos al caso vectorial resultados de [6] (ver también [7], [2] y [12]).

Teorema 10. *Sean $\omega \in \mathcal{M}$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p \leq \infty$ y E un espacio de Banach. Entonces*

1. *La inyección canónica $\mathcal{B}_{p,k}(E) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\omega(E)$ es continua. La aplicación $Z : \mathcal{S}_\omega(E) \rightarrow \mathcal{B}_{p,k}(E)$ dada por*

$$\langle u, Z(f) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx, \quad f \in \mathcal{S}_\omega(E), \quad u \in \mathcal{S}_\omega$$

está bien definida, es lineal, inyectiva y continua.

2. *Las aplicaciones bilineales*

- a) $\mathcal{S}_\omega \times \mathcal{B}_{p,k}(E) \rightarrow \mathcal{B}_{p,k}(E) : (u, T) \mapsto u T$

- b) $\mathcal{S}_\omega \times \mathcal{B}_{p,k}(E) \rightarrow \mathcal{B}_{p,k}(E) : (u, T) \mapsto u * T$

son continuas.

Demostración. 1. Sea $\{T_j\}$ una sucesión en $\mathcal{B}_{p,k}(E)$ convergente a 0. Si $\hat{T}_j = \xi(f_j)$ con $f_j \in L_{p,k}(E)$ entonces $f_j \rightarrow 0$ en $L_{p,k}(E)$. Por la Proposición 7 parte 1, $\hat{T}_j = \xi(f_j) \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}'_\omega(E)$, luego, $\hat{T}_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}'_\omega(E)$. Por tanto la inyección canónica $\mathcal{B}_{p,k}(E) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\omega(E)$ es continua. Consideremos ahora la aplicación $Z = \xi \circ \eta : \mathcal{S}_\omega(E) \rightarrow \mathcal{S}'_\omega(E)$, donde ξ y η son las aplicaciones definidas en la Proposición 7, veamos que $Z(\mathcal{S}_\omega(E)) \subset \widehat{\mathcal{B}_{p,k}(E)}$. En efecto, debemos ver que para cada $f \in \mathcal{S}_\omega(E)$, se verifica $\widehat{Z(f)} = Z(\hat{f})$. Si $f \in \mathcal{S}_\omega(E)$ se tiene para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$, $\langle u, \widehat{Z(f)} \rangle = \langle \hat{u}, Z(f) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) f(x) dx$. De otro lado, $\langle u, Z(\hat{f}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \hat{f}(x) dx$, luego para cada

$e \in E'$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) f(x) dx, e \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) \langle f(x), e \rangle dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \widehat{(e \circ f)}(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e \circ \hat{f}(x) dx \\
&= \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \hat{f}(x) dx, e \right\rangle
\end{aligned}$$

por el teorema de Hahn-Banach se concluye $\langle u, \widehat{Z(f)} \rangle = \langle u, Z(\hat{f}) \rangle$, para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$. Así, $\widehat{Z(f)} = Z(\hat{f})$ y $Z(\mathcal{S}_\omega(E)) \subset \mathcal{B}_{p,k}(E)$. Consecuentemente, Z es una aplicación lineal e inyectiva de $\mathcal{S}_\omega(E)$ en $\mathcal{B}_{p,k}(E)$. Veamos que Z es continua de $\mathcal{S}_\omega(E)$ en $\mathcal{B}_{p,k}(E)$. Sea $\{f_j\}$ una sucesión en $\mathcal{S}_\omega(E)$ convergente a 0, entonces $\hat{f}_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}_\omega(E)$ por lo que $\eta(\hat{f}_j) \rightarrow 0$ en $L_{p,k}(E)$ (Proposición 7 parte 2), pero esto equivale a que $Z(f_j) \rightarrow 0$ en $\mathcal{B}_{p,k}(E)$.

2 a) Supongamos que $u \in \mathcal{S}_\omega$ y $T \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$. Sabemos que $uT \in \mathcal{S}'_\omega(E)$, puesto que $\mathcal{B}_{p,k}(E) \subset \mathcal{S}'_\omega(E)$ y también $\widehat{uT} = (2\pi)^{-n} \hat{u} * \hat{T}$. Veamos que $\hat{u} * \hat{T} \in L_{p,k}(E)$. En efecto, $\hat{u} * \hat{T}$ es medible, y como $\hat{T} \in L_{p,k}(E)$ entonces $(\hat{u} * \hat{T})(x) = \left\langle \tau_x \hat{u}, \hat{T} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x-y) \hat{T}(y) dy$, $x \in \mathbb{R}^n$ multiplicando esta última expresión por $k(x)$ y teniendo en cuenta que $k(x) \leq M_k(x-y)k(y)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|k(x)(\hat{u} * \hat{T})(x)\|_E &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} k(x) \hat{u}(x-y) \hat{T}(y) dy \right\|_E \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} M_k(x-y) k(y) |\hat{u}(x-y)| \|\hat{T}(y)\|_E dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} M_k(x-y) |\hat{u}(x-y)| \|k(y) \hat{T}(y)\|_E dy \\
&= (|M_k \hat{u}| * \|k \hat{T}\|_E)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $M_k \hat{u} \in L_1$ y $\|k \hat{T}\|_E \in L_p$, entonces por la desigualdad

de Young se tiene

$$\begin{aligned} \left\| |M_k \hat{u}| * |k \hat{T}| \right\|_{L_p} &\leq \|M_k \hat{u}\|_{L_1} \|k \hat{T}\|_E \|L_p \\ &= (2\pi)^{-n(1+\frac{1}{p})} \|u\|_{1, M_k} \|T\|_{p,k}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\hat{u} * \hat{T} \in L_{p,k}(E)$, es decir, $uT \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$ y además,

$$\|uT\|_{p,k} \leq \|u\|_{1, M_k} \|T\|_{p,k} \leq c q_{0,\lambda}(u) \|T\|_{p,k}$$

siendo c y Λ ciertas constantes positivas independientes de u y T . Estas desigualdades implican que la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\omega \times \mathcal{B}_{p,k}(E) &\longrightarrow \mathcal{B}_{p,k}(E) \\ (u, T) &\longmapsto uT \end{aligned}$$

sea continua.

b) Si $u \in \mathcal{S}_\omega$ y $T \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$, entonces $\widehat{u * T} = \hat{u} \hat{T}$. Además, como \hat{T} se puede representar por una función de $L_{p,k}(E)$ (función que también representamos por \hat{T}) tenemos que $\widehat{u * T}$ también se puede representar por una función de $L_{p,k}(E)$. En efecto, si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{u}(x) \hat{T}(x) \right\|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{T}(x) \right\|^p \left[e^{\lambda\omega(x)} |\hat{u}(x)| \right]^p e^{-\lambda p \omega(x)} dx \\ &\leq [q_{0,\lambda}(u)]^p \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{T}(x) \right\|^p e^{-\lambda p \omega(x)} dx \\ &\leq [q_{0,\lambda}(u)]^p \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{T}(x) \right\|^p dx \\ &= (2\pi)^{n/p} \|T\|_{p,k}^p [q_{0,\lambda}(u)]^p. \end{aligned}$$

Si $p = \infty$ entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{u}(x) \hat{T}(x) \right\| &= e^{\lambda\omega(x)} |\hat{u}(x)| e^{-\lambda\omega(x)} \left\| k(x) \hat{T}(x) \right\|_{\infty, k} \\ &\leq q_{0,\lambda}(u) \|T\|_{\infty, k} \end{aligned}$$

Por tanto, $u * T \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$ y $\|u * T\|_{p,k} \leq q_{0,\lambda}(u) \|T\|_{p,k}$. De esta última desigualdad y de la continuidad de la transformada de Fourier se sigue la continuidad de la aplicación bilineal dada. \square

Agradecimientos. Agradezco al evaluador sus comentarios y sugerencias. Al Prof. Joaquín Motos por su apoyo constante en el desarrollo de este trabajo.

Referencias

- [1] A. Beurling, Quasi-analyticity and general distributions. *Lectures 4 and 5*. A.M.S. Summer institute, Stanford, 1961 (mimeographed).
- [2] G. Björck, Linear partial differential operators and generalized distributions, *Ark Mat.* 6, pág 351-407, 1966.
- [3] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis. *Result. Math.* 17, pág 206-237, 1990.
- [4] I. Cioranescu, L. Zsido, ω -ultradistributions and their application to the operator theory. *Banach Center Pub.* Vol 8, Polish Sci. Publ. Warsaw, pág 77-220, 1982.
- [5] J. Diestel and J. J. Uhl Jr, *Vector Measures*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 15. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1977.
- [6] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1963.
- [7] Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1983.
- [8] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces.*, B.B. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [9] H. Komatsu, Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math.* 20, pág 25-105, 1973.
- [10] H. Komatsu, Ultradistributions II. The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math.* 24, pág 607-628, 1977.
- [11] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer Verlag. New York. Heidelberg, Berlin, 1969.
- [12] J. Motos y M^a. J. Planells, Sobre los espacios de Hörmander vectoriales $\mathcal{B}_{p,k}(E)$, *Collectanea Mathematica*, pág 263-286, 1988.
- [13] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*. Grad. Texts in Mat, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1999.
- [14] L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *J. Analyse Math.* 4, pág 88-148, 1954-55.
- [15] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier* 7, pág 1-141, 1957.

Dirección del autor: Jairo Villegas G Universidad Eafit, Medellín, Colombia.
javille@eafit.edu.co

Métricas conformes en superficies compactas con frontera

Gonzalo García

Oscar Andrés Montaña

Resumen

Sea (S, g) una superficie Riemanniana compacta con frontera. En este trabajo discutimos el problema de la curvatura gaussiana y la curvatura geodésica prescritas sobre S y su frontera ∂S , respectivamente. Si la característica de Euler $\chi(S)$ de S es no positiva, encontramos condiciones sobre las funciones \tilde{k} definida sobre S y \tilde{h} definida sobre ∂S para que exista una métrica \tilde{g} , conforme a la métrica g , con curvatura de Gauss \tilde{k} sobre S y curvatura geodésica \tilde{h} sobre la frontera de S .

Palabras y frases claves: Superficie riemanniana compacta con frontera, curvatura gaussiana y curvatura geodésica, métrica conforme.

1 Introducción

Consideremos una superficie riemanniana compacta (S, g) con frontera suave ∂S tal que la curvatura gaussiana sobre S es k y la curvatura geodésica sobre ∂S es h . Un problema interesante de geometría diferencial consiste en caracterizar las parejas de funciones \tilde{k} definida sobre S y \tilde{h} definida sobre ∂S para las cuales existe una métrica \tilde{g} conforme a la métrica g ($\tilde{g} = e^{2u}g$ para alguna función $u \in C^\infty(S)$) con curvatura gaussiana prescrita \tilde{k} definida sobre S y curvatura geodésica prescrita \tilde{h} definida sobre ∂S .

Observamos que la existencia de \tilde{g} , dadas las funciones \tilde{k} y \tilde{h} , es equivalente a mostrar la existencia de una función $u \in C^\infty(S)$ que satisfaga el problema siguiente.

$$\begin{cases} \Delta u - k + \tilde{k}e^{2u} = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + h = \tilde{h}e^u & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (1)$$

donde $\tilde{g} = e^{2u}g$.

La primera ecuación nos dice que la curvatura gaussiana de S con la métrica \tilde{g} es $k_{\tilde{g}} = \tilde{k}$, y la segunda ecuación nos dice que la curvatura geodésica de la frontera ∂S con la métrica \tilde{g} es $h_{\tilde{g}} = \tilde{h}$.

Para que la ecuación (1) tenga solución, las funciones \tilde{k} y \tilde{h} deben satisfacer la condición de Gauss-Bonnet

$$\int_S \tilde{k}(x)e^{2u}dv + \int_{\partial S} \tilde{h}(x)e^u d\sigma = 2\pi\chi(S),$$

donde $\chi(S)$ es la característica de Euler de la superficie S .

En el caso de superficies con característica de Euler positiva se han encontrado otras obstrucciones para la solución del problema (1). Si S es el disco unitario B^2 , y las funciones x_i , $i=1,2$ son las restricciones de las dos primeras funciones coordenadas a la esfera S^2 , Hamza [7] demostró que si el problema (1) tiene solución entonces la condición integral siguiente es válida:

$$\int_{B^2} \frac{(1+|y|^2)^2}{4} e^{2u} \nabla(x_{i0}\tau) \cdot \nabla k dv_{g_0} + 2 \int_{\partial B^2} e^u \nabla x_i \cdot \nabla h d\sigma_{g_0} = 0, \quad (2)$$

donde τ es la inversa de la proyección estereográfica con polo en $s = (0, 0, -1)$. Mas aún, Escudero y García encontraron en [5] una familia de parejas de funciones \tilde{k} y \tilde{h} que satisfacen esta condición integral y que no son curvatura gaussiana o curvatura geodésica, respectivamente, de una métrica g conforme a la métrica usual del disco unitario. Aunque en este caso varios autores (Ver [1], [8], [10]) han encontrado condiciones suficientes sobre las funciones \tilde{k} y \tilde{h} para la existencia de \tilde{g} , aún existe un gran salto entre las condiciones suficientes y las condiciones necesarias.

El caso de superficies con frontera y característica de Euler no positiva es más claro. Cherrier en [2] encontró condiciones generales sobre la superficie S , y las funciones \tilde{k} y \tilde{h} para la existencia de la métrica \tilde{g} . En efecto, si k es la curvatura gaussiana de S y h es la curvatura geodésica de ∂S , respecto de la métrica g , si al menos una de las funciones \tilde{k} y \tilde{h} es no nula, y f es una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta f = k & \text{en } S \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} = -h & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (3)$$

Cherrier encontró el resultado siguiente para superficies de característica de Euler cero.

Teorema 1.1. Sean $\int_S k(x)dv = 0$ y $\int_{\partial S} h(x)d\sigma = 0$ y f la solución de (3).

1. Si $\tilde{k} \equiv 0$ el problema (1) tiene una solución suave si y sólo si \tilde{h} cambia de signo y satisface $\int_{\partial S} \tilde{h}e^f ds < 0$.

2. Si $\tilde{h} \equiv 0$ el problema (1) tiene una solución suave si y sólo si \tilde{k} cambia de signo y satisface $\int_S \tilde{k}e^{2f} dv < 0$.

En el caso de superficies con característica de Euler negativa, Cherrier demostró el teorema siguiente.

Teorema 1.2. Supongamos que $\int_S k(x)dv \leq 0$, $\int_{\partial S} h(x)d\sigma \leq 0$, y al menos una de ellas distinta de cero. Si \tilde{k} , \tilde{h} son ambas no idénticamente cero y no positivas, entonces el problema (1) tiene una solución suave u .

El propósito del presente trabajo es señalar que las hipótesis sobre cada una de las integrales $\int_S k(x)dv$ y $\int_S h(x)dv$ se pueden debilitar y reemplazar por hipótesis sobre la característica de Euler de la superficie. Nuestros resultados que aparecerán en la Sección 3 son los siguientes:

Teorema 3.1 *Supongamos que $\chi(S) < 0$. Si $\tilde{k} \leq 0$, $\tilde{h} \leq 0$ y una de las dos no es idénticamente cero entonces el problema (1) tiene una solución suave u .*

Teorema 3.2 *Sean $\chi(S) = 0$, $\tilde{h} \equiv 0$ y f es la solución de (3). El problema (1) tiene una solución suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones*

- i. $\tilde{k} \equiv 0$.
- ii. \tilde{k} cambia de signo y satisface $\int_S \tilde{k}e^{2f} dv < 0$.

Teorema 3.3 *Sean $\chi(S) = 0$, $\tilde{k} \equiv 0$ y f es la solución de (3). El problema (1) tiene una solución suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones*

- i. $\tilde{h} \equiv 0$.
- ii. \tilde{h} cambia de signo y satisface $\int_{\partial S} \tilde{h}e^f ds < 0$.

Este artículo está organizado como sigue. En la segunda sección enunciamos algunos resultados debidos a Cherrier los cuales son básicos en geometría diferencial y ecuaciones diferenciales parciales elípticas, y fundamentales en el presente trabajo. La tercera sección está dedicada a la demostración de los resultados de existencia de soluciones del problema (1).

2 Preliminares

En esta sección presentamos en su orden un refinamiento de Cherrier de una desigualdad clásica de Trudinger, el teorema de regularidad de

Cherrier, y el principio de sub y super soluciones. La demostración del primer teorema aparece en [3], el teorema de regularidad en [2], y el principio de sub y super soluciones se puede consultar tanto en [2] como en [4].

Teorema 2.1. Sea (S, g) una variedad riemanniana, compacta, suave, con frontera ∂S suave. Para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $C(\varepsilon)$ tal que, si $\phi \in H_1$, se tiene:

$$\int_S e^\phi dv \leq C(\varepsilon) \exp \left(\frac{1+\varepsilon}{8\pi} \|\nabla \phi\|_2^2 + M(\phi) \right)$$

y

$$\int_{\partial S} e^\phi dv \leq C(\varepsilon) \exp \left(\frac{1+\varepsilon}{4\pi} \|\nabla \phi\|_2^2 + M(\phi) \right),$$

donde $M(\phi)$ designa indiferentemente la media de ϕ sobre S o sobre ∂S .

Definición 2.1. Sea (S, g) una variedad riemanniana, compacta, suave, con frontera ∂S suave. Sean $h \in C^\infty(R \times S)$, $r \in C^\infty(R \times \partial S)$ y $\phi \in L_1^2(S)$. Diremos que ϕ es una solución débil del problema

$$\begin{cases} \Delta \phi + h(\phi, x) = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + r(\phi, y) = 0 & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (4)$$

Si existe un real $q > 1$ tal que $h(\phi, x) \in L^q(S)$, $r(\phi, y) \in L^q(\partial S)$ y para todo $\xi \in L_1^2(S)$

$$\int_S (-\nabla \phi \cdot \nabla \xi + h(\phi, x)\xi) dv(x) + \int_{\partial S} r(\phi, y)\xi ds(y) = 0.$$

Teorema 2.2. Sea (S, g) una variedad riemanniana, compacta, suave, con frontera ∂S suave. Si $\phi \in L_1^2(S)$ es una solución débil del problema (4) entonces es una solución suave.

Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(x, u) = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + g(x, u) = 0 & \text{sobre } \partial S \end{cases} \quad (5)$$

Definición 2.2. Diremos que $\bar{u} \in C^2(S)$ es una super-solución del problema (5) si

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} + f(x, \bar{u}) \leq 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} + g(x, \bar{u}) \geq 0 & \text{sobre } \partial S. \end{cases} \quad (6)$$

Si $\underline{u} \in C^2(S)$ satisface las desigualdades opuestas, diremos que es una subsolución de (5).

Teorema 2.3. Sea $f \in C^\infty(S \times R)$ y $g \in C^\infty(\partial S \times R)$. Si existe una super-solución \bar{u} y una sub-solución \underline{u} del problema (5), con $\underline{u} \leq \bar{u}$, entonces existe una solución suave de (5) tal que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$.

3 Existencia de métricas conformes

Aunque el problema (1) no ha sido completamente resuelto, entendemos relativamente bien el caso de característica de Euler no positiva. De la fórmula de Gauss-Bonnet tenemos que en el caso de característica de Euler negativa una de las funciones \tilde{k} y \tilde{h} tiene que ser negativa en algún punto. Logramos demostrar en este caso (teorema 3.1) que la condición \tilde{k} y \tilde{h} no positivas y al menos una no idénticamente cero es suficiente para resolver el problema (1). El lema siguiente y el principio de sub y supersoluciones son fundamentales para la obtención de este resultado.

Lema 3.1. Sea $2\pi\chi(S) = \int_S kdv + \int_{\partial S} hds < 0$. Si el problema (1) tiene una super-solución $\bar{u} \in C^2(S)$, entonces tiene una solución suave.

Demostración. Supongamos que existe una supersolución suave \bar{u} del problema (1). De acuerdo con el teorema (2.3) basta con encontrar una sub-solución \underline{u} del problema (1) con $\underline{u} \leq \bar{u}$. Sea ϕ una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta\phi = k - \frac{2\pi\chi(S)}{v_1+v_2} & \text{en } S \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = -h + \frac{2\pi\chi(S)}{v_1+v_2} & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (7)$$

donde $v_1 = \int_S dv$ y $v_2 = \int_{\partial S} ds$.

Sea $\underline{u} = \phi - c$, donde c es un número positivo. Escogiendo c suficientemente grande tenemos

$$\Delta\underline{u} - k + \tilde{k}e^{2\underline{u}} = -\frac{2\pi\chi(S)}{v_1+v_2} + \tilde{k}e^{2(\phi-c)} > 0,$$

$$\frac{\partial\underline{u}}{\partial\eta} + h - \tilde{h}e^{\underline{u}} = \frac{2\pi\chi(S)}{v_1+v_2} - \tilde{h}e^{\phi-c} < 0,$$

y $\underline{u} \leq \bar{u}$. Esto concluye la demostración del lema. \square

Teorema 3.1. Supongamos que $\chi(S) < 0$. Si $\tilde{k} \leq 0$, $\tilde{h} \leq 0$ y una de las dos no es idénticamente cero entonces el problema (1) tiene una solución suave u .

Demostración. En virtud del lema anterior, necesitamos solamente encontrar una super solución de (1). Sea $\bar{u} = a\phi + b$, donde a y b son constantes positivas y ϕ es una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta\phi = R_0 - \tilde{k} & \text{en } S \\ \frac{\partial\phi}{\partial\eta} = -R_0 + \tilde{h} & \text{sobre } \partial S, \end{cases}$$

donde $R_0 = \frac{\int_S \tilde{k}dv + \int_{\partial S} \tilde{h}ds}{v_1 + v_2}$.

Sea $a > 0$ tal que

$$\begin{aligned} aR_0 &< k && \text{para todo } x \in S \\ aR_0 &< h && \text{para todo } x \in \partial S \end{aligned}$$

Dado a , tomemos b tal que

$$\begin{aligned} e^{2(a\phi+b)} - a &> 0 && y \\ e^{(a\phi+b)} - a &> 0. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \Delta\bar{u} - k + \tilde{k}e^{2\bar{u}} &= (aR_0 - k) + \tilde{k}(e^{2(a\phi+b)} - a) < 0 && y \\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta} + h - \tilde{h}e^{\bar{u}} &= (-aR_0 + h) + \tilde{h}(a - e^{a\phi+b}) > 0. \end{aligned}$$

Esto demuestra que \bar{u} es una super-solución, lo cual concluye la demostración del teorema. \square

Ahora discutimos el caso de característica de Euler cero. Bajo la suposición de que una de las dos funciones \tilde{k} ó \tilde{h} es idénticamente cero, tenemos condiciones necesarias y suficientes (teoremas 3.2 y 3.3) para la solución del problema (1).

Teorema 3.2. Sean $\chi(S) = 0$, $\tilde{h} \equiv 0$ y f es la solución de (3). El problema (1) tiene una solución suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones

- i. $\tilde{k} \equiv 0$.
- ii. \tilde{k} cambia de signo y satisface $\int_S \tilde{k}e^{2f} dv < 0$.

Demostración. Supongamos primero que u es una solución suave de (1), y demostremos la validez de las condiciones i) y ii) del teorema. Sea f una solución de (3). Si $v = u - f$, entonces v satisface el problema

$$\begin{cases} \Delta v + \tilde{k}e^{2v+2f} = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial v}{\partial\eta} = 0 & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (8)$$

y por lo tanto $\tilde{k}e^{2f} = -e^{-2v}\Delta v$. Integrando la igualdad anterior, usando la identidad de Green y el hecho que v satisface el problema (8) encontramos que

$$\int_S \tilde{k}e^{2f} dv = - \int_S e^{-2v} \Delta v dv = -2 \int_S e^{-2v} |\nabla v|^2 dv \leq 0.$$

Si la integral es igual a cero, se sigue que $|\nabla v| = 0$ lo cual implica que $\tilde{k}e^{2v+2f} = 0$, y por lo tanto $\tilde{k} \equiv 0$. De otro lado, si la integral es estrictamente menor que cero, como $\chi(S) = 0 = \int_S \tilde{k}e^{2u} dv$ entonces \tilde{k} tiene que cambiar de signo.

Demostremos ahora que cada una de las condiciones i) y ii) es suficiente para la existencia de una solución suave del problema (1). Si $\tilde{k} \equiv 0$ entonces la función f es una solución del problema (1). Supongamos entonces que la función \tilde{k} es no nula. Consideremos el conjunto

$$M = \{u \in L_1^2(S) : \int_S u dv = 0, \int_S \tilde{k}e^{2u+2f} dv = 0\}.$$

Puesto que \tilde{k} cambia de signo, el conjunto M es un subconjunto no vacío de $L_1^2(S)$. Consideremos el problema de minimización de la funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_S |\nabla u|^2 dv.$$

sobre el conjunto M . Supongamos que existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \inf_{u \in S} J(u)$. Por la teoría de los multiplicadores de Lagrange existen constantes α y β tales que

$$\int_S \nabla u_0 \cdot \nabla \phi dv = \alpha \int_S \phi dv + \beta \int_S \tilde{k}e^{2u_0+2f} \phi dv \quad \text{para toda } \phi \in L_1^2(S).$$

Tomando $\phi \equiv 1$ en la igualdad anterior tenemos que

$$\alpha \int_S dv = -\beta \int_S \tilde{k}e^{2u_0+2f} dv = 0,$$

dado que $u_0 \in M$. Por lo tanto $\alpha = 0$ y

$$\int_S \nabla u_0 \cdot \nabla \phi dv = \beta \int_S \tilde{k}e^{2u_0+2f} \phi dv \quad \text{para toda } \phi \in L_1^2(S),$$

es decir u_0 es una solución débil del problema

$$\begin{cases} \Delta u_0 + \beta \tilde{k}e^{2u_0+2f} = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial S. \end{cases} \quad (9)$$

La primera desigualdad del teorema (2.1) implica que $e^{u_0} \in L^p(S)$ para todo $p \geq 1$. Se sigue del teorema de regularidad de Cherrier (2.2) que u_0 es una solución suave de (9). Por consiguiente $\beta \tilde{k} e^{2f} = -e^{-2u_0} \Delta u_0$. Integrando esta última igualdad, usando la identidad de Green, y el hecho que $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$, obtenemos que

$$\beta \int_S \tilde{k} e^{2f} dv = - \int_S e^{-2u_0} \Delta u_0 dv = -2 \int_S e^{-2u_0} |\nabla u_0|^2 dv < 0.$$

Esta desigualdad, y el hecho que $\int_S \tilde{k} e^{2f} dv < 0$, implican que $\beta > 0$.

Definamos ahora la función $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} \log \beta$. Entonces v_0 es una solución suave del problema

$$\begin{cases} \Delta v + \tilde{k} e^{2v+2f} = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (10)$$

y por lo tanto $u = v_0 + f$ es una solución suave de (1).

A continuación demostraremos la existencia de u_0 . Sea $\{u_i\} \subset M$ una sucesión minimizante, esto es $J(u_i) \rightarrow c_0 = \inf_{u \in M} J(u)$. Puesto que $\int_S u_i dv = 0$, la desigualdad de Poincaré implica que $\|u_i\|_2^2 \leq cJ(u_i)$. Así $\{u_i\}$ es acotada en $L_1^2(S)$, y por lo tanto existe una subsucesión, que denotaremos también por $\{u_i\}$, que converge débilmente a $u_0 \in L_1^2(S)$ y fuertemente en $L^p(S)$. Por la semicontinuidad débil inferior de $J(u)$ (Ver [6]), $J(u_0) \leq c_0$. En lo que sigue mostraremos que $u_0 \in M$. De la convergencia débil de $\{u_i\}$ se deduce que $\int u_0 dv = 0$. Reemplazando ϕ por $p\phi$ en la primera desigualdad del teorema (2.1), observamos que si $\phi \in L_1^2(S)$ entonces $e^\phi \in L^p(S)$. En particular tenemos que e^{u_i} y e^{u_0} son acotadas en $L^p(S)$. Por lo tanto la desigualdad de Hölder, la convergencia fuerte de u_i en L^p , y la primera desigualdad del teorema (2.1) implican que la integral

$$\begin{aligned} \int_S \tilde{k} e^{2f} (e^{2u_i} - e^{2u_0}) dv &= \int_S \tilde{k} e^{2f} \int_0^1 \frac{d}{dt} e^{2u_0+2t(u_i-u_0)} dt dv \\ &= 2 \int_0^1 \int_S \tilde{k} e^{2f} e^{2u_0+2t(u_i-u_0)} (u_i - u_0) dv dt. \end{aligned}$$

tiende a cero cuando $i \rightarrow \infty$. Así

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_S \tilde{k} e^{2u_i+2f} dv = \int_S \tilde{k} e^{2u_0+2f} dv = 0.$$

Se sigue de esta igualdad junto con $\int u_0 dv = 0$ que $u_0 \in M$. De la definición de c_0 también tenemos $J(u_0) \geq c_0$, y por lo tanto $J(u_0) = c_0$.

Como se explicó en el párrafo anterior, esto implica que el problema (1) tiene una solución suave. \square

Teorema 3.3. Sean $\chi(S) = 0$, $\tilde{k} \equiv 0$ y f es la solución de (3). El problema (1) tiene una solución suave si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones

- i. $\tilde{h} \equiv 0$.
- ii. \tilde{h} cambia de signo y satisface $\int_{\partial S} \tilde{h}e^f ds < 0$.

Demostración. Supongamos primero que u es una solución suave de (1), y demostremos la validéz de las condiciones i) y ii) del teorema. Sea f una solución de (3). Si $v = u - f$, entonces v satisface el problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = \tilde{h}e^{v+f} & \text{sobre } \partial S, \end{cases} \quad (11)$$

y por lo tanto $\tilde{h}e^f = e^{-v} \frac{\partial v}{\partial \eta}$. Integrando la igualdad anterior, usando la identidad de Green y el hecho que v satisface el problema (11) encontramos que

$$\int_{\partial S} \tilde{h}e^f ds = - \int_S e^{-v} |\nabla v|^2 dv \leq 0.$$

Si la integral es igual a cero, se sigue que $|\nabla v| = 0$ en S , de donde tenemos que $\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$ en ∂S , lo cual junto con (11) implican $\tilde{h} \equiv 0$. De otro lado, si la integral es estrictamente menor que cero, como $\chi(S) = 0 = \int_{\partial S} \tilde{h}e^{2u} ds$, entonces \tilde{h} tiene que cambiar de signo.

Demostremos ahora que cada una de las condiciones i) y ii) es suficiente para la existencia de una solución suave del problema (1). Si $\tilde{h} \equiv 0$ entonces la función f es una solución del problema (1). Supongamos ahora que \tilde{h} es no nula. Consideremos el conjunto

$$M = \{u \in L_1^2(S) : \int_S u dv = 0, \int_{\partial S} \tilde{h}e^{u+f} ds = 0\}.$$

Puesto que \tilde{h} cambia de signo, el conjunto M es un subconjunto no vacío de $L_1^2(S)$.

Consideremos el problema de minimización de la funcional

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_S |\nabla u|^2 dv.$$

sobre el conjunto M . Un razonamiento similar al del teorema anterior, usando la segunda desigualdad del teorema (2.1) en vez de la primera,

demuestra que existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \inf_{u \in S} J(u)$. Por la teoría de los multiplicadores de Lagrange existen constantes α y β tales que u_0 es una solución débil de

$$\begin{cases} \Delta u_0 + \alpha = 0 & \text{en } S \\ \frac{\partial u_0}{\partial \eta} - \beta \tilde{h} e^{u_0+f} = 0 & \text{sobre } \partial S. \end{cases} \quad (12)$$

Lo anterior, unido a que $u_0 \in M$, implican que

$$\int_S \alpha dv = -\beta \int_{\partial S} \tilde{h} e^{u_0+f} ds = 0,$$

y $\alpha = 0$. Usando las ecuaciones (12) de nuevo tenemos

$$\beta \int_{\partial S} \tilde{h} e^f ds = \int_{\partial S} e^{-u_0} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} ds = - \int_S e^{-u_0} |\nabla u_0|^2 dv < 0.$$

Puesto que también $\int_{\partial S} \tilde{h} e^f ds < 0$, entonces $\beta > 0$. Las ecuaciones (3) y (12) implican que $u = u_0 + \log \beta + f$ es solución débil de (1). El teorema de regularidad de Cherrier (2.2) asegura la suavidad de la solución. \square

Agradecimientos G. García fué apoyado por la Universidad del Valle, y parcialmente por Colciencias con el proyecto 1106-05-10283, CT-220-2000. Oscar A. Montaña fué apoyado por la Pontificia Universidad Javeriana.

Referencias

- [1] A. Chang y P. Yang, Conformal deformation of metrics on S^2 . *J. Differential Geometry*, 27 (1988), 259-296
- [2] P. Cherrier, Problèmes de Newman non linéaires sur les variétés riemanniennes, *J. Functional Analysis*. 57 (1984), 154-206.
- [3] P. Cherrier, Meilleures constantes dans des inégalités sur les variétés riemanniennes, *C.R.Acad. Sci. Paris Série A* 292 (1981), 235-288.
- [4] J. Escobar, Conformal metrics with prescribed mean curvature on the boundary, *Cal. Var.* 4(1996), 559-592.
- [5] C. Escudero y G. García, Una nota sobre la deformación conforme de métricas en la bola euclidiana. Aceptado *Revista Colombiana de Matemáticas*. 2003.
- [6] L. Evans, *Partial Differential Equations*, Vol 19. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1998.

- [7] H. Hamza, Sur les transformations conformes des variétés riemanniennes à bord. *J. functional analysis*. 92,1990, N° 2, 403-447.
- [8] L.Jia-Quan y L. Ping-Li, Nirenberg's problem on the 2-dimensional hemi-sphere, *International Journal of Mathematics*, volume 4, N° 6, 1993, 927-938.
- [9] R. Schoen y S. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, International Press, Boston, 1994.
- [10] L. Yanyan, The Nirenberg problem in a domain with boundary, *Topological methods in nonlinear analysis*, volume 6, 1995, 309-329.

Dirección de los autores: Gonzalo García Universidad del Valle, Cali, Colombia. ggarcia@univalle.edu.co — Oscar Andrés Montaña Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia. omontano@puj.edu.co

La revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* es un órgano de expresión del profesorado y de todos los interesados en el desarrollo matemático universitario. Haga conocer sus trabajos y sus puntos de vista enviando a la revista

- artículos
- notas de clase
- glosas sobre libros y artículos
- problemas y soluciones
- noticias, etc.

Envíelos a través de los corresponsales de *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* o directamente a la siguiente dirección

Matemáticas: Enseñanza Universitaria
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Valle
Apartado Aéreo 25360,
Cali, Colombia.
Teléfonos: (2) 330-25-66 339-32-27
e-mail: revistaerm@univalle.edu.co
página web: <http://revistaerm.univalle.edu.co>



Injection and suction effects on three-dimensional unsteady flow and heat transfer between two parallel porous plates

R.C. Chaudhary Bhupendra Kumar Sharma

Abstract

The problem of unsteady three-dimensional flow of an incompressible viscous fluid between two horizontal parallel porous plates with transverse sinusoidal injection of the fluid at the stationary plate and with constant suction through the plate in uniform motion has been studied. The moving plate is kept at oscillating wall temperature while the stationary plate is at constant temperature. Analytical expressions for velocity, temperature, and rate of heat transfer are obtained and discussed with the help of graphs and tables.

Keywords: Three-dimensional Unsteady flow, Heat transfer, Injection and Suction, Porous plates.

1 Introduction

The problem of laminar flow control is gaining considerable importance in the field of aeronautical engineering in view of its application to reduce drag and hence the vehicle powers requirements by a substantial amount. The increase in the drag coefficient may be prevented by the suction of the fluid and heat transfer from the boundary layer to the wall. The various theoretical and experimental studies of different arrangements and configurations of suction holes and slits have been compiled by Lachmann [1].

To reduce the drag by increasing suction alone is uneconomical, as the energy consumption of the suction pump will be more. Therefore, the method of “Cooling of the wall” in controlling the laminar flow together with the application of suction has become more useful and has consequently been focused in recent times. Most of the investigators have however confined themselves to two-dimensional flows. The exact solution of the plane Couette flow with transpiration cooling has been studied by Eckert [2]. He considered the uniform injection and suction at the porous plates and hence the problem remained two-dimensional. However, situations may arise where the flow fields may be essentially

three-dimensional. One such example is where variation in the suction or injection velocity distribution is transverse to the potential flow. Gersten and Gross [3] have studied the effect of transverse sinusoidal suction velocity distribution on flow and heat transfer over a plane wall with constant temperature. Singh [4, 5] and Singh [6] extended this idea further to horizontal and vertical porous plates with constant wall temperature. Singh [7] further studied the Couette flow with transpiration cooling to get a better record of the sinusoidal injection velocity. However, the plates are kept at constant temperature.

The problems involving a periodic surface temperature are of considerable practical importance in estimating the periodic temperatures (and periodic thermal stresses) in the walls of combustion engines. Hence, the aim of this paper is to study the effects of injection and suction on the unsteady three-dimensional flow and heat transfer, caused by the periodic injection velocity perpendicular to the flow direction at the stationary plate, while the upper moving plate is kept at periodic wall temperature.

2 Formulation of the problem

We consider the flow of a viscous incompressible fluid between two parallel flat porous plates. The upper plate in uniform motion with velocity U is subjected to a constant suction V_0 velocity and the lower to a transverse sinusoidal injection velocity distribution of the form

$$V^*(z^*) = V_0 \left(1 + \varepsilon \cos \frac{\pi z^*}{d} \right) \quad (1)$$

where ε is a positive constant quantity ($\ll 1$). Without any loss of generality, the distance d between the plates is taken equal to the wave length of the injection velocity. All physical quantities are independent of x^* for this problem of fully developed laminar flow but the flow remains three-dimensional due to the injection velocity (1). Thus, under the usual Boussinesq approximation, the flow is governed by the following equations:

Continuity equation

$$\frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \quad (2)$$

Momentum equations

$$\rho^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right), \quad (3)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right), \quad (4)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right). \quad (5)$$

Energy equation:

$$\rho^* C_p \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = K \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right). \quad (6)$$

The boundary conditions are

$$\begin{cases} y^* = 0; & u^* = 0, \quad v^* = V_0(1 + \varepsilon \cos \frac{\pi z^*}{d}), \quad w^* = 0, \quad T^* = T_0 \\ y^* = d; & u^* = U, \quad v^* = V_0, \quad w^* = 0, \quad T^* = T_1 + \varepsilon(T_1 - T_0)e^{i\omega^* t^*} \end{cases} \quad (7)$$

Now introducing the following non-dimensional quantities

$$\begin{aligned} y &= \frac{y^*}{d}, & z &= \frac{z^*}{d}, & t &= \frac{V_0 t^*}{4d}, & \omega &= \frac{4d\omega^*}{V_0}, \\ u &= \frac{u^*}{U}, & v &= \frac{v^*}{V_0}, & w &= \frac{w^*}{V_0}, & \text{Pr} &= \frac{\mu C_p}{K}, & p &= \frac{p^*}{\rho^* V_0^2}, \\ \theta &= \frac{T^* - T_0}{T_1 - T_0}, & \lambda(\text{injection parameter}) &= \frac{V_0 d}{\nu} \end{aligned}$$

we get

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (9)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (10)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (11)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial t} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\lambda \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right). \quad (12)$$

The corresponding boundary conditions reduce to

$$\begin{cases} y = 0; & u = 0, \quad v = 1 + \varepsilon \cos \pi z, \quad w = 0, \quad T = 0. \\ y = 1; & u = 1, \quad v = 1, \quad w = 0, \quad T = 1 + \varepsilon e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (13)$$

3 Solution

When the amplitude of injection velocity $\varepsilon \ll 1$, we assume the solution in the neighbourhood of the plate of the form

$$f(y, z, t) = f_0(y) + \varepsilon f_1(y, z, t) + \varepsilon^2 f_2(y, z, t) + \dots \quad (14)$$

where f stands for any of u , v , w , p and θ . When $\varepsilon = 0$ the problem is reduced to the well known two-dimensional flow with constant injection and suction at both plates. The solution of this two-dimensional problem is

$$\begin{cases} u_0(y) = \frac{e^{\lambda y} - 1}{e^{\lambda} - 1}, & v_0 = 1, & w_0 = 0, & p_0 = \text{constant} \\ \theta_0 = \frac{e^{\lambda y} - 1}{e^{\lambda} - 1}. \end{cases} \quad (15)$$

Taking into account the solutions of the transverse velocity components v_0 and w_0 , the terms on the comparison of coefficients of ε give the following equations:

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + w_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right), \quad (17)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right), \quad (18)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} \right), \quad (19)$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{1}{\lambda \text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \right), \quad (20)$$

with boundary conditions

$$\begin{cases} y = 0; & u = 0, & v_1 = \cos \pi z, & w_1 = 0, & \theta_1 = 0. \\ y = 1; & u_1 = 0, & v_1 = 0, & w_1 = 0, & \theta_1 = e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (21)$$

This is the set of linear partial differential equations which describe the three-dimensional flow. In order to solve these equations we separate the variables y , z and t in the following manner:

$$u_1(y, z, t) = u_{11}(y) e^{i\omega t} + u_{12}(y) \cos \pi z \quad (22)$$

$$v_1(y, z, t) = v_{11}(y) e^{i\omega t} + v_{12}(y) \cos \pi z \quad (23)$$

$$w_1(y, z, t) = - \left[z v_{11}(y) e^{i\omega t} + \frac{1}{\pi} v_{12}(y) \sin \pi z \right] \quad (24)$$

$$p_1(y, z, t) = p_{11}(y) e^{i\omega t} + p_{12}(y) \cos \pi z \quad (25)$$

$$\theta_1(y, z, t) = \theta_{11}(y) e^{i\omega t} + \theta_{12}(y) \cos \pi z \quad (26)$$

Equations (23) and (24) are chosen so that the equation of continuity (16) is satisfied. Substituting equations (22) to (26) in equations (17) to (21) and equating the coefficient of harmonic and non-harmonic terms, we get the following equations:

$$u''_{11} - \lambda u'_{11} - \frac{\lambda i \omega u_{11}}{4} = \lambda u'_0 v_{11} \quad (27)$$

$$u''_{12} - \lambda u'_{12} - \pi^2 u_{12} = \lambda u'_0 v_{12} \quad (28)$$

$$\begin{cases} y = 0; & u_{11} = 0, & u_{12} = 0. \\ y = 1; & u_{11} = 0, & u_{12} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

$$v''_{11} - \lambda v'_{11} - \frac{\lambda i \omega v_{11}}{4} = \lambda p'_{11} \quad (30)$$

$$v''_{12} - \lambda v'_{12} - \pi^2 v_{12} = \lambda p'_{12} \quad (31)$$

$$v'''_{11} - \lambda v''_{11} - \frac{\lambda i \omega v'_{11}}{4} = 0 \quad (32)$$

$$v'''_{12} - \lambda v''_{12} - \pi^2 v'_{12} = \lambda \pi^2 p_{12} \quad (33)$$

$$\begin{cases} y = 0; & v_{11} = 0, & v_{12} = 1, & v'_{12} = 0, & v'_{11} = 0. \\ y = 1; & v_{11} = 0, & v_{12} = 1, & p_{11} = 0, & p_{12} = 0. \end{cases} \quad (34)$$

$$\theta''_{11} - \lambda \text{Pr} \theta'_{11} - \frac{\lambda \text{Pr} i \omega \theta_{11}}{4} = \lambda \text{Pr} \theta'_0 v_{11} \quad (35)$$

$$\theta''_{12} - \lambda \text{Pr} \theta'_{12} - \pi^2 \theta_{12} = \lambda \text{Pr} \theta'_0 v_{12} \quad (36)$$

$$\begin{cases} y = 0; & \theta_{11} = 0, & \theta_{12} = 0. \\ y = 1; & \theta_{11} = 0, & \theta_{12} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

From these equations the solutions of u_1 , v_1 , w_1 , p_1 , θ_1 are obtained as

$$u_1(y, z) = \left[L e^{r_1 y} + M e^{r_2 y} + \frac{\lambda}{A e^\lambda - 1} \left(\frac{A_1}{2r_1} e^{(\lambda+r_1)y} + \frac{A_2}{2r_2} e^{(\lambda+r_2)y} - \frac{A_3}{\pi} e^{(\lambda+\pi)y} + \frac{A_4}{\pi} e^{(\lambda-\pi)y} \right) \right] \cos \pi z \quad (38)$$

$$v_1(y, z) = \frac{1}{A} (A_1 e^{r_1 y} + A_2 e^{r_2 y} - A_3 e^{\pi y} - A_4 e^{-\pi y}) \cos \pi z \quad (39)$$

$$w_1(y, z) = \frac{1}{\pi A} (A_1 r_1 e^{r_1 y} + A_2 r_2 e^{r_2 y} - \pi A_3 e^{\pi y} + \pi A_4 e^{-\pi y}) \sin \pi z \quad (40)$$

$$p_1(y, z) = \frac{1}{A} (A_3 e^{\pi y} + A_4 e^{-\pi y}) \cos \pi z \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(y, z, t) = & \left(\frac{e^{m_1 y} - e^{m_2 y}}{e^{m_1} - e^{m_2}} \right) e^{i\omega t} + \left[\frac{\lambda \text{Pr}^2}{A(e^{\lambda \text{Pr}} - 1)} \left(\frac{A_1 e^{(r_1 + \lambda \text{Pr})y}}{r_1(\text{Pr} + 1)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{A_2 e^{(r_2 + \lambda \text{Pr})y}}{r_2(\text{Pr} + 1)} - \frac{A_3 e^{(\pi + \lambda \text{Pr})y}}{\pi \text{Pr}} + \frac{A_4 e^{(\lambda \text{Pr} - \pi)y}}{\pi \text{Pr}} \right) + R e^{s_1 y} + S e^{s_2 y} \right] \cos \pi z \end{aligned} \quad (42)$$

where

$$\begin{aligned} A &= 2(r_2 - r_1)(1 + e^{r_1 + r_2}) - [(r_2 - r_1) + 2\pi](e^{r_1 + \pi} + e^{r_2 - \pi}) \\ &\quad - [(r_2 - r_1) - 2\pi](e^{r_1 - \pi} + e^{r_2 + \pi}) \\ A_1 &= (\pi - r_2)e^{r_2 + \pi} - (\pi + r_2)e^{r_2 - \pi} + 2r_2 \\ A_2 &= (\pi + r_1)e^{r_1 - \pi} - (\pi - r_1)e^{r_1 + \pi} - 2r_1 \\ A_3 &= (r_1 - r_2)e^{r_1 + r_2} + (r_2 - \pi)e^{r_1 - \pi} - (r_1 - \pi)e^{r_2 - \pi} \\ A_4 &= (r_1 - r_2)e^{r_1 + r_2} + (r_2 + \pi)e^{r_1 + \pi} - (r_1 + \pi)e^{r_2 + \pi} \\ r_1 &= \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = & \frac{\lambda}{A(e^\lambda - 1)(e^{r_1} - e^{r_2})} \left[\frac{A_1}{2r_1}(e^{r_2} - e^{\lambda + r_1}) \right. \\ & \left. + \frac{A_2}{2r_2}(e^{r_2} - e^{\lambda + r_2}) - \frac{A_3}{\pi}(e^{r_2} - e^{\lambda + \pi}) + \frac{A_4}{\pi}(e^{r_2} - e^{\lambda - \pi}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = & \frac{\lambda}{A(e^\lambda - 1)(e^{r_1} - e^{r_2})} \left[\frac{A_1}{2r_1}(e^{\lambda + r_1} - e^{r_1}) \right. \\ & \left. + \frac{A_2}{2r_2}(e^{\lambda + r_2} - e^{r_1}) - \frac{A_3}{\pi}(e^{\lambda + \pi} - e^{r_1}) + \frac{A_4}{\pi}(e^{\lambda - \pi} - e^{r_1}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = & \frac{\lambda \text{Pr}^2}{A(e^{\lambda \text{Pr}} - 1)(e^{s_1} - e^{s_2})} \left[\frac{A_1}{r_1(\text{Pr} + 1)}(e^{s_2} - e^{\lambda \text{Pr} + r_1}) \right. \\ & \left. + \frac{A_2}{r_2(\text{Pr} + 1)}(e^{s_2} - e^{\lambda \text{Pr} + r_2}) \right. \\ & \left. - \frac{A_3}{\pi}(e^{s_2} - e^{\lambda \text{Pr} + \pi}) + \frac{A_4}{\pi}(e^{s_2} - e^{\lambda \text{Pr} - \pi}) \right] \end{aligned}$$

$$S = \frac{\lambda \text{Pr}^2}{A(e^{\lambda \text{Pr}} - 1)(e^{s_1} - e^{s_2})} \left[\frac{A_1}{r_1(\text{Pr} + 1)} (e^{\lambda \text{Pr} + r_1} - e^{s_1}) \right. \\ \left. + \frac{A_2}{r_2(\text{Pr} + 1)} (e^{\lambda \text{Pr} + r_2} - e^{s_1}) \right. \\ \left. - \frac{A_3}{\pi} (e^{\lambda \text{Pr} + \pi} - e^{s_1}) + \frac{A_4}{\pi} (e^{\lambda \text{Pr} - \pi} - e^{s_1}) \right]$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \left(\lambda \text{Pr} + \sqrt{(\lambda \text{Pr})^2 + 4\pi^2} \right), \quad s_2 = \frac{1}{2} \left(\lambda \text{Pr} - \sqrt{(\lambda \text{Pr})^2 + 4\pi^2} \right) \\ m_1 = \frac{1}{2} \left(\lambda \text{Pr} + \sqrt{(\lambda \text{Pr})^2 + \lambda \text{Pr} i\omega} \right) \\ m_2 = \frac{1}{2} \left(\lambda \text{Pr} - \sqrt{(\lambda \text{Pr})^2 + \lambda \text{Pr} i\omega} \right).$$

Substituting equations (15), (42) in equation (14), we get the expression for the temperature profiles. The temperature can now be expressed in terms of fluctuating parts as

$$\theta(y, z, t) = \theta_0(y) + \varepsilon [(T_r \cos \omega t - T_i \sin \omega t) + \theta_{12}(y) \cos \pi z] \quad (43)$$

where

$$T_r + iT_i = \frac{e^{m_1 y} - e^{m_2 y}}{e^{m_1} - e^{m_2}}.$$

For $\omega t = \frac{\pi}{2}$ we can now obtain the temperature profiles as

$$\theta \left(y, z, \frac{\pi}{2\omega} \right) = \theta_0(y) + \varepsilon (\theta_{12}(y) \cos \pi z - T_i). \quad (44)$$

4 Discussion

Fig.1 gives the main flow velocity profiles for $z = 0$ and $\varepsilon = 0.2$. If there is neither injection nor suction, the dotted line represents the well known Couette flow. This figure reveals that the velocity decreases exponentially when there is injection. For higher rate of injection the decay is greater. The maximum and minimum values of the velocities occur on the plates, which are the velocities of the plates. The secondary flow component w_1 , which is due to the transverse sinusoidal injection velocity, is shown in Fig.2, for several injection parameters. The maximum of the velocity occurs in the fluid not far from the stationary plate. The transient temperature profiles are shown in Fig.3 for $z = 0$. In the region between the plates the fluid will be heated to a temperature below that of the moving plate, which is kept at maximum temperature, hence maximum

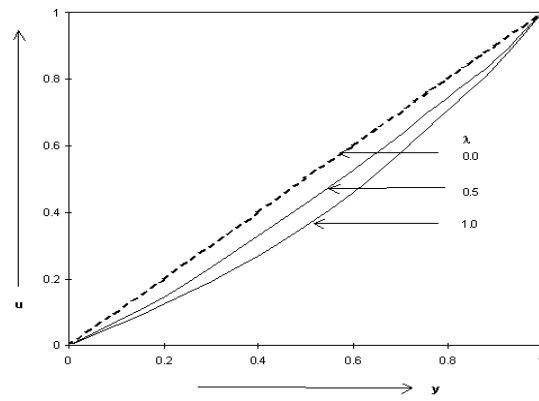


Figure 1: Main flow velocity profiles for $z = 0$ and $\epsilon = 0.2$

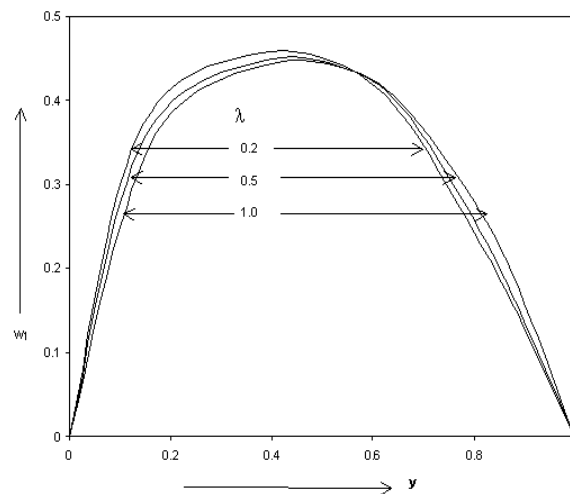


Figure 2: Cross flow velocity for $z = 0.5$

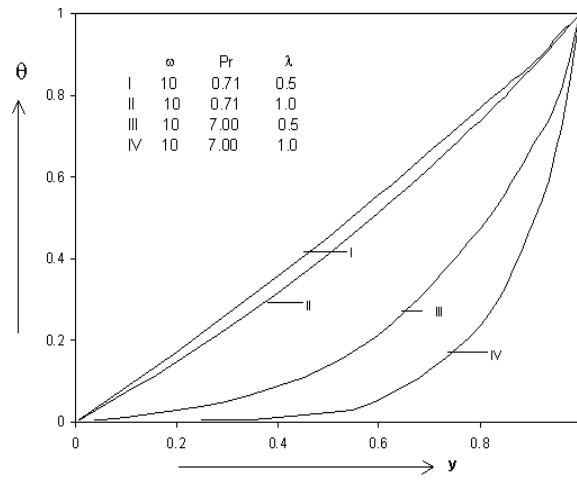


Figure 3: Transient temperature profiles for $\omega t = \pi/2$ ($\epsilon = 0.2$ $z = 0$)

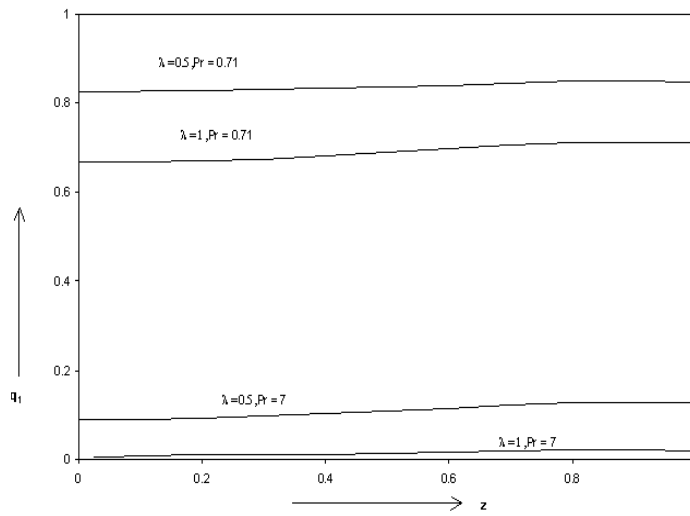


Figure 4: Sinusoidal rate of heat transfer for $\epsilon = 0.2$

occurs at that plate. When the rate of injection increases, the cooling occurs in the region. It is found that the temperature in the case of air is more than that of water. For $Pr = 7$ (water), the temperature decreases exponentially from the plate kept at higher temperature. For higher λ , this decay is greater. The maximum and minimum values of temperature occur on the plates.

From the temperature field we can calculate the rate of heat transfer in non-dimensional form as

$$-q = \frac{dq^*}{\kappa(T_1 - T_0)} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial\theta_0}{\partial y}\right)_{y=0} + \varepsilon \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (45)$$

and in terms of the amplitude and the phase q , can be expressed as

$$q = q_1 + \varepsilon |N| \cos(\omega t + ga) \quad (46)$$

where the sinusoidal rate of heat transfer

$$q_1 = \frac{\lambda Pr}{e^{\lambda Pr} - 1} + \varepsilon \left[Rs_1 + Ss_2 + \frac{\lambda Pr^2}{A(e^{\lambda Pr} - 1)} \left(\frac{A_1(\lambda Pr + r_1)}{r_1(Pr + 1)} + \frac{A_2(\lambda Pr + r_2)}{r_2(Pr + 1)} - \frac{A_3(\lambda Pr + \pi)}{\pi Pr} + \frac{A_4(\lambda Pr - \pi)}{\pi Pr} \right) \right] \cos \pi z,$$

$$N_r + iN_i = \frac{m_1 - m_2}{e^{m_1} - e^{m_2}} \quad \text{and} \quad \tan \alpha = \frac{N_i}{N_r}.$$

The sinusoidal rate of heat transfer is, as Fig.4 also shows, a function of the Prandtl number Pr and injection parameter λ . When $Pr = 0.71$ (air), which means the viscosity is small but the thermal conductivity is finite, the heat transfer is great. However, when the viscosity is large in comparison to the thermal diffusivity ($Pr = 7$, in the case of water), the heat transfer reduces. The deviation from the numerically calculated heat transfer amounts significantly for $0.71 \leq Pr \leq 7$. It is also observed from the figure that in the case of blowing (injection) the heat transfer decreases as Prandtl number increases.

Table 1

λ	Pr/ω	$ N $			$\tan \alpha$		
		5	10	20	5	10	20
0.5	0.71	0.9887	0.9850	0.9299	0.8389	0.8967	0.9319
0.5	7	0.7738	0.5733	0.3377	0.9313	0.9117	0.8984

Table 2

λ	Pr/ω	$ N $			$\tan \alpha$		
		5	10	20	5	10	20
0.5	0.71	0.6908	0.6822	0.6165	0.7299	0.8330	0.8840
0.5	7	0.4455	0.2586	0.1078	0.9736	0.8892	0.8582

Table 1 and Table 2 give the amplitude and phase shift ($\tan \alpha$) of the rate of heat transfer for $\lambda = 0.5$ and $\lambda = 1.0$ respectively. We observe that due to the high frequency (ω) of the oscillations in temperature, the magnitude of rate of heat transfer reduces. It is further noted that the values of $|N|$ are less in water than in air. The values of $\tan \alpha$ show that there is always a phase lead in the rate of heat transfer coefficient.

Acknowledgement. One of the authors, Bhupendra Kumar Sharma, is grateful to the Council of Scientific and Industrial Research, New Delhi (India), for the award of a Junior Research Fellowship.

References

- [1] G.V.Lachmann, *Boundary layer and flow control. Its principles and Application*, Vol.I II, Pergamon press, Oxford (1961).
- [2] E.R.Eckert, *Heat and Mass Transfer*. McGraw Hill, New York, (1958).
- [3] K.Gersten and J.F.Gross, *J. Appl. Maths. Phys. (ZAMP)*, 25, 399-408, 1974.
- [4] P.Singh, V.P.Sharma and U.N.Mishra, *Appl. Sci. Res.*, 34, 105-115 (1978).
- [5] Ibid, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 21, 1117-1123, (1978).
- [6] K.D.Singh, *J. Appl. Math. Mech. (ZAMM)*, 73, 58-61, (1993).
- [7] Ibid, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 50, 661- 668, (1999).

Dirección de los autores: R.C. Chaudhary — Bhupendra Kumar Sharma Department of Mathematics, University of Rajasthan, JAIPUR-302004, India.

Escuela Regional de Matemáticas

Universidades de Nariño, del Cauca, del Valle, del Quindío, Tecnológica de Pereira, EAFIT, de Antioquia, Surcolombiana, de Medellín, de la Amazonía.



Por el desarrollo de las Matemáticas
desde una perspectiva regional.

Revista de Matemáticas de la E.R.M.
Departamento de Matemáticas, Univalle,
Apartado Aéreo 25360 Cali.
Teléfonos: (2) 330-25-66 339-32-27.
FAX: (2) 330-25-66.
Página web: <http://revistaerm.univalle.edu.co/>
e-mail: revistaerm@univalle.edu.co

Normas tensoriales construidas mediante espacios de sucesiones de Banach

Patricia Gómez Palacio,
Juan Antonio López Molina, , María José Rivera Ortún, ,

Resumen

En este artículo se define una norma tensorial g_λ^c a partir de un espacio de sucesiones de Banach λ . Para cada par de espacios de Banach E y F , se caracterizan los elementos de la compleción del espacio $E \otimes_{g_\lambda} F$, $E \widehat{\otimes}_{g_\lambda} F$, y se caracteriza su espacio dual $(E \otimes_{g_\lambda} F)'$

Palabras y frases claves: Retículos de Banach, espacios de sucesiones, ideales de operadores, productos tensoriales

1 Introducción

En la teoría general de productos tensoriales, cuyos antecedentes los encontramos en el trabajo de Grothendieck de los años cincuenta pero que cobró mayor fuerza en 1968 con la publicación del artículo de Lindenstrauss y Pelzynski *Absolutely summing operators in L_p -spaces and applications*, se destacan entre los ejemplos más relevantes de normas tensoriales aquellas que se definen en la clase de espacios de dimensión finita y después se extienden a la clase de los espacios normados utilizando un procedimiento inductivo, lo que da lugar a las normas tensoriales finitamente generadas.

El problema de definir topologías interesantes sobre los productos tensoriales se ha centrado a través de la historia en la utilización de espacios de sucesiones para la definición de las mismas, dando como resultado normas tensoriales finitamente generadas. En particular, la teoría clásica estudia las normas tensoriales definidas mediante los espacios de sucesiones ℓ_p , y entre ellas se destacan las de Lapresté (α_{pq}), de las cuales las normas tensoriales g_p de Saphar son un caso particular.

¹La participación del primer autor en este trabajo es apoyada por el proyecto COLCIENCIAS-Universidad Eafit código: 1216-05-11456 y la de los otros dos autores por MCYT y FEDER proyecto BFM2001-2670.

Tomando como motivación la definición de las normas tensoriales g_p de Saphar, contruimos una norma tensorial g_λ definida sobre un determinado espacio de sucesiones de Banach λ , con el objetivo de desarrollar toda la teoría básica y clásica referente a los ideales de operadores asociados, y presentar resultados similares a los conocidos acerca de las normas tensoriales g_p , ver [1], [3] o [2].

Hemos procurado que la notación utilizada sea la comúnmente aceptada. Por el símbolo \mathbb{R} representaremos el cuerpo de los números reales, sobre el cual se definen todos los espacios vectoriales topológicos que aparecen. En general la palabra espacio hará referencia a un espacio de Banach real, a menos que se indique otra cosa. Dado un espacio E denotaremos por B_E a su bola unidad cerrada, y por E' denotaremos su dual topológico. Si E es un espacio normado, denotaremos por \widehat{E} al espacio de Banach que resulta de la complección de E . Con el símbolo $\|\cdot\|_E$, o simplemente $\|\cdot\|$ si no hay lugar a confusión, denotaremos la norma definida en el mismo espacio E , como es usual. Dados dos espacios E y F , denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ al espacio de operadores lineales y continuos de E en F .

Dado un espacio de Banach X parcialmente ordenado diremos que X es *retículo de Banach* si se tiene que:

1. $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$, para todo $x, y, z \in X$,
2. $ax \geq 0$, para todo $x \geq 0$ en X y todo real no negativo a .
3. Para todo par $x, y \in X$ existen en X una mínima cota superior (m.c.s) $x \vee y$, y una máxima cota inferior (m.c.i) $x \wedge y$,
4. $\|x\| \leq \|y\|$ siempre que $|x| \leq |y|$, donde el valor absoluto $|x|$ de $x \in X$ está definido por $|x| = x \vee (-x)$.

Denotamos por ω el espacio vectorial de todas las sucesiones escalares y por φ el subespacio de ω formado por las sucesiones tales que el cardinal de las coordenadas distintas de cero es finito.

Diremos que un espacio de Banach $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ es un *espacio de sucesiones de Banach* si satisface:

1. $\varphi \subset \lambda \subset \omega$
2. Si $|x| \leq |y|$ con $x \in \omega$ y $y \in \lambda$ entonces $x \in \lambda$ y $\|x\|_\lambda \leq \|y\|_\lambda$

Obsérvese que todo espacio de sucesiones de Banach λ dotado con el orden puntual es un retículo de Banach. Decimos que un espacio de sucesiones λ es regular si la sucesión de vectores unidad $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$,

donde $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^\infty$, es una base de Schauder en λ . En este caso, λ satisface la propiedad de la convergencia seccional, es decir, dada una sucesión $(x_i)_{i=1}^\infty$ en λ se verifica la siguiente igualdad en la norma de λ

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Denotamos por h_λ a la clausura en λ del espacio φ , $h_\lambda = \overline{\varphi}^\lambda$. Entonces h_λ es un subespacio regular de λ , y se tiene que λ es regular si y sólo si $\lambda = h_\lambda$. Un retículo de Banach λ es *orden continuo* si $\|x\|_\lambda \downarrow 0$ cada vez que $0 \leq x_n \downarrow 0$, lo que es equivalente a que su dual topológico λ' coincida con su dual Köthe

$$\lambda^\times = \{(x_i)_{i=1}^\infty \in \omega / \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \text{ converge para todo } (y_i)_{i=1}^\infty \in \lambda\}$$

Los espacios de sucesiones clásicos ℓ_p , $1 \leq p \leq \infty$, los espacios de sucesiones de Orlicz ℓ_M y los espacios de sucesiones de Lorentz ℓ_{pq} , $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ son ejemplos de espacios de sucesiones de Banach, ver [4].

2 Normas tensoriales e ideales de operadores. Conceptos básicos

En esta sección introducimos los conceptos de norma tensorial e ideal de operadores, y establecemos algunas relaciones entre éstos y entre las normas tensoriales asociadas a una norma tensorial dada. Un tratamiento más detallado de este tema puede encontrarse en el texto [1].

2.4 Normas tensoriales

Dados E y F espacios vectoriales sobre \mathbb{R} , denotamos por $B(E, F)$ el espacio vectorial de las formas bilineales definidas de $E \times F$ en \mathbb{R} . Cada elemento $(x, y) \in E \times F$ define una forma lineal canónica sobre $B(E, F)$, denotada por $x \otimes y$, mediante la fórmula $\langle x \otimes y, \psi \rangle := \psi((x, y))$ para toda $\psi \in B(E, F)$. El subespacio vectorial del dual algebraico de $B(E, F)$ generado por el conjunto las formas lineales $\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$ es el *producto tensorial* de los espacios E y F , y se le denota por $E \otimes F$.

A los elementos de $E \otimes F$ los denominamos tensores y estos admiten una representación de la forma $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

Si el espacio $E \otimes F$ está dotado de una norma α , denotamos por $E \otimes_\alpha F$ al correspondiente espacio normado, por $E \widehat{\otimes}_\alpha F$ a su espacio compleción, y por $\alpha(z; E, F)$, o simplemente por $\alpha(z)$, a la norma α de un elemento $z \in E \otimes F$.

Definición 2.1. Una norma tensorial α es un functor que asocia a cada par de espacios normados E y F una norma sobre $E \otimes F$, y satisface las siguientes condiciones:

$$i) \alpha(x \otimes y) = \|x\| \|y\| \text{ y } \alpha(x' \otimes y') = \|x'\| \|y'\|, \text{ para } x \in E, y \in F, \\ x' \in E', y' \in F'.$$

ii) Para cualquier cuádrupla de espacios normados $E_i, F_i, i = 1, 2$, y cualquier par de operadores $A_i \in \mathcal{L}(E_i, F_i)$, se satisface la Propiedad métrica de los operadores:

$$A_1 \otimes A_2 \in \mathcal{L}(E_1 \otimes_\alpha E_2, F_1 \otimes_\alpha F_2), \text{ con } \|A_1 \otimes A_2\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$$

$$\text{donde } (A_1 \otimes A_2)(x_1 \otimes x_2) := A_1(x_1) \otimes A_2(x_2)$$

Dada una norma tensorial α , definimos su norma tensorial *transpuesta*, α^t por,

$$\alpha^t(z; E, F) := \alpha(z^t; F, E)$$

donde $z^t = (\sum_{k=1}^n x_k \otimes y_k)^t := (\sum_{k=1}^n y_k \otimes x_k)$

Para introducir el concepto de norma tensorial finitamente generada, necesitamos establecer la siguiente notación. Dado un espacio de Banach E , denotamos por $FIN(E)$ al conjunto de los subespacios de dimensión finita de E , y por $COFIN(E)$ al conjunto de los subespacios de E de codimensión finita. Si M es un subespacio cerrado de E , denotamos por $I_M^E : M \rightarrow E$, $Q_M^E : E \rightarrow E/M$ a la inclusión y la aplicación cociente canónicas respectivamente.

Definición 2.2. Dada una norma tensorial α , definimos la norma tensorial $\vec{\alpha}$ en una clase de los espacios normados, o envoltura finitamente generada por α , por:

$$\vec{\alpha}(z) := \inf\{\alpha(z; M, N) : M \in FIN(E), N \in FIN(F)\}$$

De manera similar definimos la norma tensorial $\overleftarrow{\alpha}$, o envoltura cofinitamente generada por α , por

$$\overleftarrow{\alpha}(z) := \sup\{\alpha((Q_H^E \otimes Q_G^F)(z)) : H \in COFIN(E), G \in COFIN(F)\}$$

Definición 2.3. Diremos que una norma tensorial α es finitamente generada (resp. cofinitamente generada) si $\alpha = \vec{\alpha}$ (resp. $\alpha = \overleftarrow{\alpha}$).

En general, para toda norma tensorial α se satisface la siguiente desigualdad

$$\overleftarrow{\alpha} \leq \alpha \leq \vec{\alpha}$$

Sea α una norma tensorial en la clase de espacios normados. Dados M un espacio de dimensión finita y F un espacio normado arbitrarios, decimos que α es *accesible* si $\overleftarrow{\alpha}(\cdot; M, F) = \overrightarrow{\alpha}(\cdot; M, F)$ y $\overleftarrow{\alpha}(\cdot; F, M) = \overrightarrow{\alpha}(\cdot; F, M)$ y que es *totalmente accesible* si $\overleftarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}$, es decir si α es finita y cofinitamente generada.

A partir de una norma tensorial α , definida en la clase de espacios normados que contiene a los espacios de dimensión finita (FIN), se define su norma tensorial dual α' como sigue. Para $M, N \in FIN$ α'_f , definida por

$$\alpha'_f(z; M, N) := \sup\{|\langle u, z \rangle| : \alpha(u; M', N') \leq 1\}$$

para todo $z \in M \otimes N$ es una norma tensorial sobre FIN .

Se define la *norma tensorial dual*, α' , de la norma tensorial α (definida sobre en la clase de espacios normados que contiene a FIN), como la envoltura finitamente generada de la norma tensorial $\alpha'_f, \overrightarrow{\alpha'_f}$.

Es claro que $\alpha' = \alpha'_f$ en FIN , y por consiguiente, para todos los $N, M \in FIN$ la igualdad $M \otimes_{\alpha'} N = (M' \otimes_{\alpha} N')'$ se satisface isométricamente. Se puede ver además que si α es finitamente generada entonces $\alpha'' = \alpha$

2.5 Ideales de operadores

Como se pone de manifiesto en el libro de A. Defant y K. Floret, *Tensor norms and operator ideals*, [1], la teoría topológica de los productos tensoriales está estrechamente ligada a la de los espacios de operadores. Esta última fue desarrollada por A. Pietsch y su escuela en los años sesenta y setenta, y sus resultados fueron publicados en el texto *Operator ideals*, [6]. A continuación fijamos la notación y recordamos los conceptos básicos más representativos de la teoría de operadores que utilizaremos.

Definición 2.4. *Un ideal de operadores (o, simplemente, ideal) entre espacios de Banach es un functor \mathfrak{I} que asocia a cada par de espacios de Banach E y F un subconjunto $\mathfrak{I}(E, F)$ de $\mathcal{L}(E, F)$ (llamado componente de \mathfrak{I}), de manera tal que se cumplen las siguientes condiciones, para espacios de Banach arbitrarios E, F, G y H :*

- i) $x' \otimes y \in \mathfrak{I}(E, F)$, para $x' \in E'$, $y \in F$.
- ii) Si $S_1, S_2 \in \mathfrak{I}(E, F)$, entonces $S_1 + S_2 \in \mathfrak{I}(E, F)$.
- iii) Si $T \in \mathcal{L}(G, E)$, $S \in \mathfrak{I}(E, F)$, y $R \in \mathcal{L}(F, H)$, entonces $RST \in \mathfrak{I}(G, H)$.

Es claro de los numerales i), ii) de la definición, que todas las componentes $\mathfrak{J}(E, F)$ son espacios lineales. Ver [6, p.45]

Sea \mathfrak{J} un ideal y a un functor que asocia a cada componente $\mathfrak{J}(E, F)$ una norma (denotada también por a), que cumple:

- iv) Para $T \in \mathcal{L}(G, E), S \in \mathfrak{J}(E, F), R \in \mathcal{L}(F, H)$, $a(R \circ S \circ T) \leq \|R\| a(S) \|T\|$.

A la pareja (\mathfrak{J}, a) la llamaremos *ideal normado*.

Un ideal de operadores (\mathfrak{J}, a) , tiene asociados diferentes ideales entre los que destacamos el ideal maximal, concepto análogo al de norma tensorial finitamente generada, y el ideal minimal, los cuales definimos a continuación.

El *ideal maximal asociado* a (\mathfrak{J}, a) , $(\mathfrak{J}^{max}, a^{max})$, es el ideal tal que dados E y F , un par de espacios de Banach, un operador $T : E \rightarrow F \in \mathfrak{J}^{max}(E, F)$ siempre y que

$$a^{max}(T) := \sup \{a(Q_L^F \cdot T \cdot I_M^E) : M \in \text{FIN}(E), L \in \text{COFIN}(F)\} < \infty$$

La función a^{max} es una norma en cada componente y $(\mathfrak{J}^{max}, a^{max})$ es un ideal normado.

El *ideal minimal asociado* a (\mathfrak{J}, a) , $(\mathfrak{J}^{min}, a^{min})$, es el ideal tal que para todo par de espacios normados E, F , $T : E \rightarrow F \in \mathfrak{J}^{min}(E, F)$, siempre que existan espacios normados G, H y operadores aproximables $S : E \rightarrow G, R : H \rightarrow F$ y $T_0 : G \rightarrow H \in \mathfrak{J}(G, H)$ tales que $T = R \circ T_0 \circ S$.

Si $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{max}$ ($\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^{min}$), \mathfrak{J} es un *ideal maximal (minimal)*.

Un ideal maximal \mathfrak{J} está asociado a una norma tensorial finitamente generada α , escribimos $\mathfrak{J} \sim \alpha$, si para cualquier par de espacios (M, N) de dimensión finita, se tiene que: $\mathfrak{J}(M, N) = M' \otimes_{\alpha} N = (M \otimes_{\alpha'} N')'$

La extensión de esta igualdad a espacios de dimensión infinita es el importante *teorema de representación para ideales de operadores maximales*, de acuerdo con el cual, si (\mathfrak{J}, a) es un ideal maximal asociado a una norma tensorial finitamente generada α , es decir $\mathfrak{J} \sim \alpha$, entonces para todo par de espacios de Banach E y F las relaciones $\mathfrak{J}(E, F') = (E \otimes_{\alpha'} F)'$ y $\mathfrak{J}(E, F) = (E \otimes_{\alpha'} F')' \cap \mathcal{L}(E, F)$ se satisfacen isométricamente.

3 Sobre la norma tensorial g_{λ}

En esta sección, a partir de un espacio de Banach de sucesiones λ , sobre el cual impondremos en su momento determinadas condiciones, definimos una norma tensorial cuya motivación inicial viene dada por la definición de las normas tensoriales de Saphar.

En adelante, λ será un espacio de Banach de sucesiones en el cual se satisface la igualdad $\|\mathbf{e}_i\|_\lambda = \|\mathbf{e}_i\|_{\lambda^\times} = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Dado un espacio de Banach E , una sucesión $(x_i)_{i=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$ es fuertemente λ -sumable si $\pi_\lambda((x_i)) := \|(\|x_i\|)\|_\lambda < \infty$ y es débilmente λ -sumable si $\varepsilon_\lambda((x_i)) := \sup_{\|x'\| \leq 1} \|(\langle x_i, x' \rangle)\|_\lambda < \infty$. Denotamos por $\lambda[E]$ (resp. $\lambda(E)$) el espacio de todas las sucesiones fuertemente (resp. débilmente) λ -sumables en E dotado con la norma $\pi_\lambda(\cdot)$ (resp. $\varepsilon_\lambda(\cdot)$).

Sean E, F espacios de Banach. Una forma natural de extender la norma tensorial de Saphar a una norma tensorial sobre $E \otimes F$, pero con parámetro λ , se logra con la definición del siguiente funcional, para todo $z \in E \otimes F$,

$$g_\lambda(z; E, F) := \inf \left\{ \pi_\lambda((x_i)) \varepsilon_{\lambda^\times}((y_i)) : z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\} \quad (1)$$

Éste coincide con g_p cuando $\lambda = \ell_p, 1 \leq p < \infty$. Sin embargo, puede verse que para espacios de Banach de sucesiones más generales, como por ejemplo un espacio de Orlicz de sucesiones, tal funcional no es una norma tensorial. Por lo anterior, consideramos el funcional de Minkowski de la envolvente absolutamente convexa de la bola unidad de g_λ en $E \otimes F$ ($B_{g_\lambda} := \{z \in E \otimes F : g_\lambda(z) \leq 1\}$), que denotamos por g_λ^c , y puede ser evaluado como

$$g_\lambda^c(z; E, F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_\lambda((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda^\times}((y_{ij})) \right\} \quad (2)$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las representaciones de z de la forma $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell_i} x_{ij} \otimes y_{ij}$.

Hay que hacer notar que g_λ y g_λ^c coinciden en el caso en que g_λ sea una norma. En la proposición que sigue a continuación demostraremos que g_λ es efectivamente una norma tensorial.

Proposición 3.1. *g_λ es una norma tensorial.*

Demostración. Para la demostración utilizamos un criterio equivalente a la definición de norma tensorial, según el cual basta verificar las siguiente condiciones:

1. $g_\lambda^c(\cdot; E, F)$ es una seminorma en $E \otimes F$ para todo $E, F \in \text{NORM}$.
2. $g_\lambda^c(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) = 1$.
3. g_λ^c cumple la propiedad métrica de las aplicaciones en NORM. Aquí NORM denota la clase de los espacios normados.

1. Para probar que g_λ^c es una seminorma en $E \otimes F$ basta verificar que g_λ^c satisface la desigualdad triangular, ya que por definición es claro que $g_\lambda^c(z; E, F) \geq 0$ y que $g_\lambda^c(\beta z; E, F) = |\beta|g_\lambda^c(z; E, F)$.

Dados $\epsilon > 0$ y $z_1, z_2 \in E \otimes F$, con $z_k = \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{\ell_i} x_{ij}^k \otimes y_{ij}^k$ para $k = 1, 2$, representaciones que satisfacen la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n_k} \pi_\lambda \left((x_{ij}^k) \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((y_{ij}^k) \right) \leq g_\lambda^c(z_k; E, F) + \frac{\epsilon}{2},$$

$z_1 + z_2$ admite una representación $z_1 + z_2 = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} \sum_{j=1}^{\ell_i} u_{ij} \otimes v_{ij}$ donde $u_{ij} = x_{ij}^1$ y $v_{ij} = y_{ij}^1$ si $1 \leq i \leq n_1$, y $u_{ij} = x_{ij}^2$ y $v_{ij} = y_{ij}^2$ si $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2$. Con lo cual,

$$\begin{aligned} g_\lambda^c(z_1 + z_2; E, F) &\leq \sum_{i=1}^{n_1} \pi_\lambda \left((x_{ij}^1) \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((y_{ij}^1) \right) \\ &\quad + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \pi_\lambda \left((x_{ij}^2) \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((y_{ij}^2) \right) \\ &\leq g_\lambda^c(z_1; E, F) + g_\lambda^c(z_2; E, F) + \epsilon \end{aligned}$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se obtiene el resultado esperado.

2. Si $E = \mathbb{K}$, $E' = \mathbb{K}$, entonces $\{\beta \in E' : \|\beta\| \leq 1\} = \{\beta \in \mathbb{K} : |\beta| \leq 1\}$ y $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha\beta$. Luego para $z \in \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$, con $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij}$ se tiene que:

$$\varepsilon_{\lambda \times}((\beta_{ij})) \leq \sup_{\|y'\|_{E'} \leq 1} |y'| \|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda \times} \leq \|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda \times}$$

Pero $\|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda \times} \leq \varepsilon_{\lambda \times}((\beta_{ij}))$, ya que $y' = 1$ es uno de los valores admisibles en la definición de $\varepsilon_{\lambda \times}((\beta_{ij}))$, con lo cual $\|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda \times} = \varepsilon_{\lambda \times}((\beta_{ij}))$. De lo anterior, con $\varepsilon_{\lambda \times}((1, 0, 0, 0, \dots)) = \|(1, 0, 0, 0, \dots)\|_{\lambda \times} = 1$ y dado que $\pi_\lambda((1, 0, 0, 0, \dots)) = \|(1, 0, 0, 0, \dots)\|_\lambda = 1$, se sigue que

$$g_\lambda^c(1 \otimes 1; \mathbb{K}, \mathbb{K}) \leq \pi_\lambda((1, 0, \dots, 0)) \varepsilon_{\lambda \times}((1, 0, \dots, 0)) = 1.$$

De otro lado, si $1 \otimes 1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij}$ es una representación arbitraria de $1 \otimes 1$, entonces

$$1 = \left| \langle 1 \otimes 1, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell_i} \alpha_{ij} \otimes \beta_{ij} \rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell_i} \alpha_{ij} \beta_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell_i} |\alpha_{ij} \beta_{ij}|$$

que es menor o igual que $\sum_{i=1}^n \|(|\alpha_{ij}|)\|_\lambda \|(|\beta_{ij}|)\|_{\lambda \times}$, por la desigualdad de Hölder. En consecuencia $1 \leq \sum_{i=1}^n \pi_\lambda((\alpha_{ij})) \varepsilon_{\lambda \times}((\beta_{ij}))$. Con lo cual,

al tomar el ínfimo sobre todas las representaciones de $1 \otimes 1$, se sigue la igualdad esperada $g_\lambda^c(1 \otimes 1; \mathbb{R}, \mathbb{R}) = 1$.

3. Finalmente, veamos que g_λ^c satisface la propiedad métrica de las aplicaciones. Sean $A \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ y $B \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ y consideremos la aplicación $A \otimes B : E_1 \otimes_{g_\lambda^c} E_2 \rightarrow F_1 \otimes_{g_\lambda^c} F_2$.

Consideramos el caso $\|B\| \neq 0$, ya que el resultado es inmediato en el caso contrario. Para cada representación $z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E_1 \otimes E_2$, dado que $\|\frac{B'(y')}{B'}\| \leq \frac{\|B'\| \|y'\|}{\|B'\|} \leq 1$ para $y' \in B_{F'}$ y $\|B'\| = \|B\|$, tenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\lambda \times}((B(y_{ij}))) &= \sup_{y' \in B_{F'_2}} \|(|\langle B(y_{ij}), y' \rangle|)\|_{\lambda \times} \\ &= \sup_{y' \in B_{F'_2}} \|(|\langle y_{ij}, B'(y') \rangle|)\|_{\lambda \times} \\ &= \|B'\| \sup_{y' \in B_{F'_2}} \|(|\langle y_{ij}, \frac{B'(y')}{\|B'\|} \rangle|)\|_{\lambda \times} \\ &\leq \|B\| \varepsilon_{\lambda \times}((y_{ij})) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} g_\lambda^c((A \otimes B)(z); F_1, F_2) &\leq \sum_{i=1}^n \pi_\lambda((A(x_{ij}))) \varepsilon_{\lambda \times}((B(y_{ij}))) \\ &= \|A\| \|B\| \sum_{i=1}^n \pi_\lambda((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda \times}((y_{ij})) \end{aligned}$$

y, tomando ínfimos sobre las distintas representaciones de z , se sigue que

$$g_\lambda^c((A \otimes B)(z); F_1, F_2) \leq \|A\| \|B\| g_\lambda^c(z; E_1, E_2)$$

con lo cual

$$\|A \otimes B\| = \sup_{z \in B_{E_1 \otimes_{g_\lambda^c} E_2}} g_\lambda^c((A \otimes B)(z); F_1, F_2) \leq \|A\| \|B\|$$

que es lo que queríamos demostrar. \square

El siguiente teorema da una caracterización de los elementos de la complección del espacio $E \otimes_{g_\lambda} F$ mediante una serie doble convergente.

Teorema 3.2. *Todo elemento de $E \widehat{\otimes}_{g_\lambda^c} F$ admite una representación de la forma $z = \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty x_{ij} \otimes y_{ij}$ donde $\{(x_{ij})_{j=1}^\infty : i \in \mathbb{N}\} \subset h_\lambda[E]$ y*

$\{(y_{ij})_{j=1}^{\infty} : i \in \mathbb{N}\} \subset \lambda^{\times}(F)$ con

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})) < \infty \quad (3)$$

Además

$$g_{\lambda}^c(z) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})) \right\} \quad (4)$$

tomando el ínfimo sobre todas las series que cumplan la condición (3).

Demostración. Veamos primero que cualquier serie del tipo mencionado es convergente en $E \widehat{\otimes}_{g_{\lambda}^c} F$ y por tanto define un elemento de la complección.

En efecto, observar que la condición (3) implica que para cada $i \in \mathbb{N}$ $\pi_{h_{\lambda}}((x_{ij}))$ y $\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij}))$ son finitos, y entonces de la propiedad de convergencia seccional en $h_{\lambda}[E]$ se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe $m_i \in \mathbb{N}$, tal que $\pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}) < \frac{\epsilon}{\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij}))}$ y como $\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}) \leq \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij}))$ se tiene que

$$\pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}) < \epsilon$$

con lo cual, si $m_i \leq m < n$, entonces

$$\begin{aligned} g_{\lambda}^c \left(\sum_{j=m+1}^n x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &\leq \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})_{j=m+1}^n) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})_{j=m+1}^n) \\ &\leq \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})_{j=m_i+1}^{\infty}) \end{aligned}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera y por tanto la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$ converge en $E \widehat{\otimes}_{g_{\lambda}^c} F$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} g_{\lambda}^c \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} g_{\lambda}^c \left(\sum_{j=1}^m x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})_{j=1}^m) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})_{j=1}^m) \leq \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})) < \infty \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} g_{\lambda}^c \left(\sum_{i=m+1}^n \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) &\leq \sum_{i=m+1}^n g_{\lambda}^c \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\ &\leq \sum_{i=m+1}^n \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij})) < \epsilon \end{aligned}$$

para m suficientemente grande, por la ecuación (3), y por tanto la sucesión de sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$ es de Cauchy y por consiguiente converge en $E \widehat{\otimes}_{g_{\lambda}^c} F$.

Además, de lo anterior, se sigue también que

$$\begin{aligned} g_{\lambda}^c(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\lambda}^c \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g_{\lambda}^c \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij} \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda \times}((y_{ij})) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda \times}((y_{ij})) \end{aligned}$$

y por tanto,

$$g_{\lambda}^c(z) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda \times}((y_{ij})) \right\}$$

Recíprocamente, veamos que para $z \in E \widehat{\otimes}_{g_{\lambda}^c} F$ hay una representación de la forma $z = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij} \otimes y_{ij}$ con la condición dada.

En efecto, como $z \in E \widehat{\otimes}_{g_{\lambda}^c} F$ es punto límite de $E \otimes_{g_{\lambda}^c} F$, existe una sucesión de Cauchy (u_n) en $E \otimes_{g_{\lambda}^c} F$ que converge a z , es decir, que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $g_{\lambda}^c(u_n - z) < \frac{\epsilon}{3}$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe una sucesión $(k_n)_{n=0}^{\infty}$ en \mathbb{N} estrictamente creciente tal que

$$g_{\lambda}^c(u_{k_n} - u_{k_{n+1}}) \leq \frac{\epsilon}{3(2^{n+1})}$$

y claramente $z = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n}$.

Renombrando $w_n = u_{k_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ se sigue que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(w_0 + \sum_{n=1}^k (w_n - w_{n-1}) \right) = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (w_n - w_{n-1})$$

Como $w_0 \in E \otimes_{g_{\lambda}^c} F$, $(w_n - w_{n-1}) \in E \otimes_{g_{\lambda}^c} F$, tienen representación en $E \otimes_{g_{\lambda}^c} F$, de la forma $w_0 = \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{m_{0i}} x_{ij}^0 \otimes y_{ij}^0$ y $(w_n - w_{n-1}) = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{m_{ni}} x_{ij}^n \otimes y_{ij}^n$ con los x_{ij}^n y los y_{ij}^n , $n = 0, 1, 2, \dots$ escogidos de tal manera que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k_0} \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij}^0)) \varepsilon_{\lambda \times}((y_{ij}^0)) &< g_{\lambda}^c(w_0) + \frac{\epsilon}{3} \\ \sum_{i=1}^{k_n} \pi_{h_{\lambda}}((x_{ij}^n)) \varepsilon_{\lambda \times}((y_{ij}^n)) &< g_{\lambda}^c(w_n - w_{n-1}) + \frac{\epsilon}{3(2^{n+1})} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$z = \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{j=1}^{m_{0i}} x_{ij}^0 \otimes y_{ij}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{m_{ni}} x_{ij}^n \otimes y_{ij}^n$$

o mejor $z = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{r_s} u_{st} \otimes v_{st}$, donde r_s, u_{st} y v_{st} , están dados por:

- i) Definimos $p_0 = 1, p_1 = k_0, \dots, p_n = \sum_{q=0}^{n-1} k_q$ para cada natural n
- ii) Para $s = 1, 2, \dots, p_1$ y $t = 1, 2, \dots, m_{0s}$, hacemos $u_{st} \otimes v_{st} = x_{st}^0 \otimes y_{st}^0$
 Para $s = p_1 + 1, \dots, p_2$ y $t = 1, \dots, m_{1(s-p_1)}$, hacemos $u_{st} \otimes v_{st} = x_{(s-p_1)t}^1 \otimes y_{(s-p_1)t}^1$
 Para $s = p_2 + 1, \dots, p_3$ y $t = 1, \dots, m_{1(s-p_2)}$, hacemos $u_{st} \otimes v_{st} = x_{(s-p_2)t}^2 \otimes y_{(s-p_2)t}^2$
- iii) Continuamos el proceso para cada natural n , teniendo presente que $s = p_n + 1, \dots, p_{n+1}$, $t = 1, \dots, m_{n(s-p_n)}$ y $u_{st} \otimes v_{st} = x_{(s-p_n)t}^n \otimes y_{(s-p_n)t}^n$. Y para simplificar la notación hacemos $m_{n(s-p_n)} = r_s$ en cada caso.

Es claro de la construcción que la serie $\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{r_s} u_{st} \otimes v_{st}$ convergente, que es una representación de z , y además satisface la condición (3), ya que la serie

$$\sum_{s=1}^{\infty} \pi_{h_\lambda} \left((u_{st})_{t=1}^{r_s} \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((v_{st})_{t=1}^{r_s} \right)$$

se puede escribir, para $t = 1 \dots r_s$ y $j = 1 \dots m_{ni}$, en la forma

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{k_0} \pi_{h_\lambda} \left((u_{st})_t \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((v_{st})_t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=p_n+1}^{p_{n+1}} \pi_{h_\lambda} \left((u_{st})_t \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((v_{st})_t \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k_0} \pi_{h_\lambda} \left((x_{ij}^0)_j \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((y_{ij}^0)_j \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \pi_{h_\lambda} \left((x_{ij}^n)_j \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((y_{ij}^n)_j \right) \\ &< g_\lambda^c(w_0) + \frac{\epsilon}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{3(2^{n+1})} \\ &\leq g_\lambda^c(w_0 - z) + g_\lambda^c(z) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < g_\lambda^c(z) + \epsilon < \infty \end{aligned}$$

Se obtiene así la representación deseada, y al ser $\epsilon > 0$ arbitrario, se sigue que

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \pi_{h_\lambda} \left((x_{ij}) \right) \varepsilon_{\lambda \times} \left((y_{ij}) \right) \right\} \leq g_\lambda^c(z)$$

de donde la igualdad (4) se satisface en forma inmediata, lo que concluye la demostración. \square

4 Sobre el dual de $E \otimes_{g_\lambda^c} F$

En la teoría de las normas tensoriales, aparecen de manera natural y asociados a la misma de diferentes maneras, determinados espacios de operadores. Estamos interesados en este epígrafe en el ideal de operadores asociado por dualidad a la norma tensorial g_λ , es decir queremos caracterizar, en términos de espacios de operadores el espacio $(E \otimes_{g_\lambda} F)'$. Tal como aparece en el libro de Pietsch "Operator Ideals", [6], la definición de muchos espacios de operadores viene descrita mediante el comportamiento de los mismos frente a determinados espacios de sucesiones.

Definición 4.1. Una aplicación $T \in \mathcal{L}(E, F)$ se dice que es λ -absolutamente sumante si existe un número real $C > 0$, tal que para toda sucesión $(x_i)_{i=1}^\infty$ en E , con $\varepsilon_\lambda((x_i)) < \infty$, se cumple que

$$\pi_\lambda((T(x_i))) \leq C\varepsilon_\lambda((x_i)) \quad (5)$$

Dicho con palabras sencillas, un operador es λ -absolutamente sumante si transforma sucesiones débilmente λ -sumables en sucesiones fuertemente λ -sumables.

Denotaremos por $\mathcal{P}_\lambda(E, F)$ al conjunto de operadores λ -absolutamente sumantes de E en F , y para cada $T \in \mathcal{P}_\lambda(E, F)$ definimos

$$\Pi_\lambda(T) := \inf \{C \geq 0 : C \text{ satisface la condición (5)}\}$$

Es fácil verificar que $\mathcal{P}_\lambda(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$ con norma $\Pi_\lambda(\cdot)$. Más aún, $\mathcal{P}_\lambda(E, F)$ es un ideal Banach de operadores, que denominamos ideal de operadores λ -absolutamente sumantes.

Teorema 4.2. Para E, F espacios de Banach, $(E \otimes_{g_\lambda^c} F)' = \mathcal{P}_{\lambda \times}(F, E')$ se satisface isométricamente.

Demostración. Para todo $T \in \mathcal{P}_{\lambda \times}(F, E')$, definimos $\varphi_T : E \otimes_{g_\lambda^c} F \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle \varphi_T, z \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_i} \langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle \quad \text{para todo } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_i} x_{ij} \otimes y_{ij} \in E \otimes_{g_\lambda^c} F$$

φ_T está bien definida con independencia de la representación elegida para z y pertenece a $(E \otimes_{g_\lambda^c} F)'$ ya que

$$|\langle \varphi_T, z \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_i} |\langle x_{ij}, T(y_{ij}) \rangle| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_i} \|x_{ij}\| \|T(y_{ij})\|$$

y por la desigualdad de Hölder la última expresión es menor o igual que:

$$\sum_{i=1}^n \|(\|x_{ij}\|)\|_{\lambda} \|(\|T(y_{ij})\|)\|_{\lambda^{\times}} \leq \Pi_{\lambda^{\times}}(T) \sum_{i=1}^n \pi_{\lambda}((x_{ij})) \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_{ij}))$$

luego, tomando ínfimos sobre todas las representaciones de z , se sigue que

$$|\langle \varphi_T, z \rangle| \leq \Pi_{\lambda^{\times}}(T) g_{\lambda}^c(z; E, F)$$

y por consiguiente $\|\varphi_T\| \leq \Pi_{\lambda^{\times}}(T)$.

Recíprocamente, dado $\varphi \in (E \otimes_{g_{\lambda}} F)'$ definimos $T_{\varphi} : F \rightarrow E'$ por

$$\langle T_{\varphi}(y), x \rangle = \langle \varphi, x \otimes y \rangle \text{ para todos } y \in F, x \in E$$

Veamos que $T_{\varphi} \in \mathcal{P}_{\lambda^{\times}}(F, E')$. Para ello, consideremos una sucesión (y_i) de elementos de F tal que $\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i)) < \infty$. Como B_E es débilmente densa en $B_{E'}$, dados $\epsilon > 0$ y $(\delta_i) \in \lambda^{\times}$ con $\|(\delta_i)\|_{\lambda^{\times}} \leq 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $x_i \in E$ tal que $\|x_i\| \leq 1$ y

$$\|T_{\varphi}(y_i)\| \leq |\langle T_{\varphi}(y_i), x_i \rangle| + \epsilon \delta_i = |\langle \varphi, x_i \otimes y_i \rangle| + \epsilon \delta_i$$

por tanto

$$\begin{aligned} \|(\|T_{\varphi}(y_i)\|)\|_{\lambda^{\times}} &\leq \|(|\langle \varphi, x_i \otimes y_i \rangle| + \epsilon \delta_i)\|_{\lambda^{\times}} \\ &\leq \|(\langle \varphi, x_i \otimes y_i \rangle)\|_{\lambda^{\times}} + \epsilon \\ &\leq \sup_{\|(\eta_i)\|_{\lambda} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \langle \varphi, x_i \otimes y_i \rangle \right| + \epsilon \end{aligned}$$

Las sucesiones (η_i) en la desigualdad anterior están en h_{λ} y $\|(\eta_i)\|_{h_{\lambda}} \leq 1$. Además, $\pi_{h_{\lambda}}((\eta_i x_i)) = \|(\|\eta_i x_i\|)\|_{h_{\lambda}} \leq \|(\eta_i)\|_{h_{\lambda}} \leq 1$ y como $\varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i)) < \infty$. Entonces del teorema 3.2 se puede ver que $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i \otimes y_i \in E \widehat{\otimes}_{g_{\lambda}^c} F$. Luego

$$\begin{aligned} \|(\|T_{\varphi}(y_i)\|)\|_{\lambda^{\times}} &\leq \sup_{\|(\eta_i)\|_{h_{\lambda}} \leq 1} \left| \langle \varphi, \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i \otimes y_i \rangle \right| + \epsilon \\ &\leq \sup_{\|(\eta_i)\|_{h_{\lambda}} \leq 1} \|\varphi\| g_{\lambda}^c \left(\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i \otimes y_i \right) + \epsilon \\ &\leq \sup_{\|(\eta_i)\|_{h_{\lambda}} \leq 1} \|\varphi\| \|(\|\eta_i x_i\|)\|_{h_{\lambda}} \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i)) + \epsilon \\ &\leq \|\varphi\| \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i)) + \epsilon \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, se sigue que $\|(\|T_{\varphi}(y_i)\|)\|_{\lambda^{\times}} \leq \|\varphi\| \varepsilon_{\lambda^{\times}}((y_i))$ y $\Pi_{\lambda^{\times}}(T_{\varphi}) \leq \|\varphi\|$, lo que concluye la demostración. \square

Como consecuencia inmediata del teorema, tenemos que $((g_\lambda^c)^t)'$ es la norma tensorial asociada al ideal de operadores $\mathcal{P}_{\lambda^\times}$, ya que $(E \otimes_{g_\lambda^c} F)' = (F \otimes_{(g_\lambda^c)^t} E)' = (F \otimes_{((g_\lambda^c)^t)''} E)'$ con lo cual $(F \otimes_{((g_\lambda^c)^t)''} E)' = \mathcal{P}_{\lambda^\times}(F, E')$ y por tanto $((g_\lambda^c)^t)' \sim \mathcal{P}_{\lambda^\times}$

Referencias

- [1] Defant, A.-Floret, K. *Tensor norms and operator ideals*. North Holland Math. Studies. North Holland. Amsterdam. 1993.
- [2] Jarchow, H. *Locally Convex Spaces*. B.B. Teubner. Stuttgart. 1981.
- [3] Köthe, G. *Topological Vector Spaces II*. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1979.
- [4] Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I and II*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [5] Persson, A. and Pietsch, A. p-nucleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen. *Studia Math.* **33**(1969), 213-222.
- [6] Pietsch, A. *Operator ideals*. North Holland Math. Library. North Holland. Amsterdam. 1980.
- [7] Saphar P. Hypothèse d'approximation à l'ordre p dans les espaces de Banach et approximation d'applications p-absolument sommantes. *Israel J. Math.* **13**(1972), 379-399.

Dirección de los autores: Patricia Gómez Palacio, Universidad EAFIT, Depto. de Ciencias Básicas, A. A.3300 Medellín, Colombia pagomez@eafit.edu.co — Juan Antonio López Molina, jalopez@mat.upv.es, María José Rivera Ortún, jrivera@mat.upv.es, E.T.S. Ingenieros Agrónomos, Camino de Vera, 46073 Valencia, España

La revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* es un órgano de expresión del profesorado y de todos los interesados en el desarrollo matemático universitario. Haga conocer sus trabajos y sus puntos de vista enviando a la revista

- artículos
- notas de clase
- glosas sobre libros y artículos
- problemas y soluciones
- noticias, etc.

Envíelos a través de los corresponsales de *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* o directamente a la siguiente dirección

Matemáticas: Enseñanza Universitaria
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Valle
Apartado Aéreo 25360,
Cali, Colombia.
Teléfonos: (2) 330-25-66 339-32-27
e-mail: revistaerm@univalle.edu.co
página web: <http://revistaerm.univalle.edu.co>



El concepto de aproximación local: una propuesta metodológica a partir de la recta tangente

Pedro Vicente Esteban Duarte

Pedro Pérez Carreras

Resumen

El propósito de este artículo es exponer una metodología para enseñar el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto, a partir de la visualización que se obtiene del haz de secantes, entendiéndolo como el conjunto de rectas que pasan todas por un punto fijo de la curva y por otros sobre la curva cada vez más cercanos al punto dado. El concepto de aproximación local es un tema central en el análisis matemático y, su enseñanza en una edad temprana ayudará a que los alumnos adquieran un avanzado nivel de razonamiento. La visualización que se propone, se obtiene con la ayuda del asistente matemático *DERIVE*® y no requiere de manipulaciones algebraicas que entorpezcan el razonamiento que los alumnos deben desarrollar y exhibir a lo largo del proceso. El material que se expone, está diseñado para ser cubierto en una clase, en la cual el profesor sirva de orientador, formulando preguntas y respondiendo inquietudes en el momento oportuno.

Palabras y frases claves: Haz de secantes, proceso de aproximación local, visualización, niveles de razonamiento, pendiente, derivada.

1 Introducción

El concepto de aproximación local es uno de los temas centrales del análisis matemático. Entre las manifestaciones importantes se encuentran la recta tangente a una curva plana en un punto, la derivada de una función en un punto, la integral de una función, las sucesiones, las series infinitas y todos los procesos que requieren del paso al límite. Todos estos conceptos forman parte de los programas de matemáticas de los últimos años de secundaria y de las carreras técnicas y científicas en los primeros años de universidad. En los textos escolares estos conceptos se comienzan a explicar a partir de su definición y luego se pasa directamente a la solución de ejercicios algebraicos. Es así como existe un total desconocimiento de los procesos de razonamiento por parte del profesor, lo cual no le permite al alumno acceder al concepto explicado en forma eficaz y correcta.

El concepto de tangente sólo se define en la escuela elemental con relación a la circunferencia. Luego se utiliza al finalizar el secundaria y en los primeros años de universidad, como una visualización del concepto

de derivada de una función en un punto. Al no tener una definición de tangente para curvas en general, se crea una asociación incorrecta entre tangente y derivada, pues la mayoría de alumnos asocian estos dos conceptos como equivalentes, llegando a trasladar la idea estática de tangente a una circunferencia al de derivada de una función en un punto, sin llegar a comprender el dinamismo, involucrado en el paso al límite, de los dos conceptos.

Utilizando el Asistente Matemático *DERIVE*® (versión 4.09 bajo Windows), proponemos una metodología para la enseñanza del concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos. Esto le permite al alumno, de los últimos años de bachillerato y primeros años de universidad, percibir una visualización del concepto de tangente y así lograr una definición verbal adecuada. La visualización propuesta se obtiene a partir de la construcción de un haz de secantes [1], que pasa por un punto fijo de una curva plana y por otros puntos sobre ella cada vez más cercanos al punto elegido; lo que permite, sin manipulaciones algebraicas, acceder al concepto mencionado. Además, de esta manera, pretendemos que el alumno involucrado en esta experiencia de aprendizaje comprenda con un alto significado matemático el concepto de derivada de una función en un punto. Pues, mediante el proceso de hallar el límite de las pendientes de la sucesión indefinida (infinita) del haz de secantes el alumno obtiene la derivada de la curva en ese punto.

2 Elementos básicos de estudio

Antes de iniciar la construcción del haz de secantes, se requiere que el alumno reconozca los objetos básicos de estudio: punto, recta y curva desde lo visual y geométrico [2]. Es decir, que el punto y la recta no tienen ningún grosor, que la línea recta solo tiene la dimensión de la longitud y que las curvas, unas pueden ser cerradas, otras abiertas y que la línea recta es un tipo especial de curva que se extiende indefinidamente en una sola dirección. Para ello, el profesor le preguntará al alumno por la idea intuitiva que tiene acerca de los objetos de estudio. Al alumno que piense que el punto y la recta tienen algún grosor, el profesor le dará la idea intuitiva correcta desde lo visual y geométrico; le ayudará a comprender que estos entes son sólo representaciones. Lo anterior es necesario para la implementación de esta propuesta metodológica.

3 Relaciones entre los elementos básicos de estudio

Resaltamos que en esta propuesta metodológica no se requiere que las gráficas se dibujen con cuadrículas o con ejes coordenados, para ello desactivamos estas opciones en la ventana gráfica de *DERIVE*®. Pues empleando esta metodología no es necesario enfatizar en la noción de distancia. Es importante tener en cuenta que una vez que el alumno haya finalizado un proceso debe borrar todas las gráficas realizadas antes de continuar con la experiencia.

3.1 Relación punto-recta

El alumno debe tener total claridad sobre el hecho de que por dos puntos del plano pasa una sola recta. Para mostrar esto, se escribe en el editor de ecuaciones de *DERIVE*® la expresión $[2, [-1, 2], [1, 2]]$ y al graficar, se obtiene en la pantalla la recta $y = 2$ y los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$ resaltados. En este momento, le preguntamos al alumno, ¿es posible trazar otra línea recta que sea distinta de la que está dibujada y que pase por esos mismos dos puntos? La respuesta esperada es: “no, por esos mismos dos puntos es imposible trazar otra recta distinta”. Aquellos alumnos que respondan afirmativamente, están indicando que tienen la idea de puntos y rectas gruesas. Antes de continuar, se hace necesario recalcar nuevamente sobre las propiedades geométricas de punto, recta y curva.

3.2 Relación punto-curva

Para una curva plana particular y un punto fijo sobre ella, el alumno debe percatarse de que existen puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste, bien sea desde la derecha o desde la izquierda. Esta visualización se puede obtener mediante las siguientes órdenes en el editor de ecuaciones de *DERIVE*®:

```
F(x) :=
PUNTOS(h, n) := VECTOR([b, f(b)], b, VECTOR(a + h/(1.2^m), m,
VECTOR(i, i, 0, n-1)))
a := a0
[a, f(a)]
```

$F(x)$ es la curva que se quiere estudiar. La función de *DERIVE*® $PUNTOS(h,n)$ permite encontrar y graficar puntos sobre la curva $F(x)$. El parámetro h , cuando h es positivo, define el valor $x=a+h$ desde el cual se comienza el acercamiento al valor $x=a$ desde la derecha. El parámetro

n es el número de puntos $(b, f(b))$ que se quieren dibujar sobre la curva. El valor $a=a_0$ define el punto $(a_0, f(a_0))$, el cual es el punto fijo sobre la curva.

La función $F(x) := 0.3(x-1)(x+2)(x+3)$ y para valores de $x > -2.5$, la definimos en el editor de ecuaciones como sigue: $F(x) := IF(x > -2.5, 0.3(x-1)(x+2)(x+3))$.

Al tomar un valor particular para a , digamos 0.1, un h positivo igual a 1 y un n igual a 5 digitamos en el editor de *DERIVE*® las siguientes instrucciones:

```
\#1: F(x):=
\#2: PUNTOS(h, n):= VECTOR([b, F(b)], b, VECTOR(a +
h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n - 1)))
\#3: a:= 0.1
\#4: [a, f(a)]
\#5: F(x):= IF(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))
\#6: PUNTOS(1, 5)
```

Al graficar la ecuación #5 y el punto $(a, f(a))$ (#4), se obtiene la Fig.1.

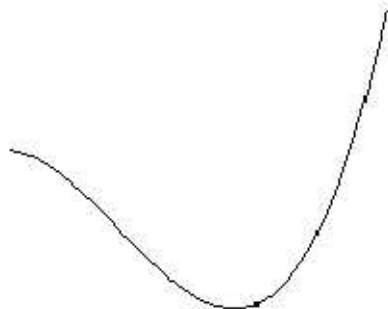


Figura 1: Punto fijo sobre la curva

Al simplificar la expresión #6 y graficarla, se obtiene la Fig.2. En este momento, se le pregunta al alumno: ¿cuántos puntos más se podrán trazar sobre la curva, de tal forma que se acerquen cada vez más al punto fijo dado? Se le motiva para que él mismo, con la función $PUNTOS(h, n)$ grafique otros puntos sobre la curva, cada vez más cerca al punto fijo. Para ello, debe mantener la h fija en 1 y la n variando de acuerdo con el número de puntos que quiere dibujar. Por ejemplo: ejecutar las ordenes

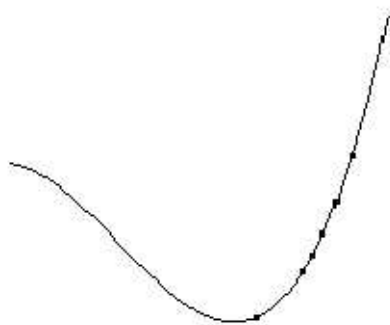


Figura 2: Puntos cercanos al punto fijo

PUNTOS(1,10), PUNTOS(1,20), etc, simplificando y graficando en cada caso.

El profesor, después de que el alumno haya hecho algunos ensayos, debe de repetir la pregunta anterior. La respuesta esperada de los alumnos es: “se puede trazar un número indefinido (infinito) de puntos cada vez más cercanos al punto fijo dado”. Cabe anotar que si el alumno manifiesta que solamente se puede dibujar un número finito de puntos, éso indica que su razonamiento está guiado más por el aspecto visual que por la abstracción. Es necesario insistirle que dibuje un número de puntos cada vez mayor con el propósito de que perciba el aspecto indefinido subyacente en este proceso.

El proceso anterior también puede ilustrarse partiendo desde la izquierda del punto fijo dado. Para ello le damos un valor negativo a h , digamos -1 , y si el número de puntos que queremos trazar es 10, ejecutamos la siguiente instrucción: PUNTOS(-1,10). Es importante hacerle notar a los alumnos que, para esta gráfica y para ese punto fijo, las conclusiones que se obtienen al efectuar el proceso de acercamiento por un lado o por el otro son las mismas. Luego, le pedimos que conjeture si sucede lo mismo para cualquier curva y cualquier punto sobre ella.

3.3 Relación recta-curva

La relación que interesa establecer entre las rectas y la curva es la de secante, para ello definimos la siguiente función de *DERIVE*®:

```
SECANTE(h, n) := VECTOR((F(a)-F(b))/(a-b)(x-a) + F(a), b,
VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n -1)))
```

Los parámetros a , h , y n tienen el mismo sentido que los dados para la función `PUNTOS(h,n)`, sólo que en este caso, la n significa el número de secantes que se quieren trazar. Todas estas secantes pasan por el punto $(a, f(a))$ y por los puntos móviles $(b, f(b))$, que se acercan cada vez más al punto fijo $(a, f(a))$. El valor b depende de h y n .

Por ejemplo, si se quieren trazar 5 secantes que pasen todas por el punto fijo $(0.1, f(0.1))$ y por puntos $(b, f(b))$ cada vez más próximos al punto fijo, se da la orden `SECANTE(1,5)`, se simplifica y grafica, obteniendo la siguiente ilustración:

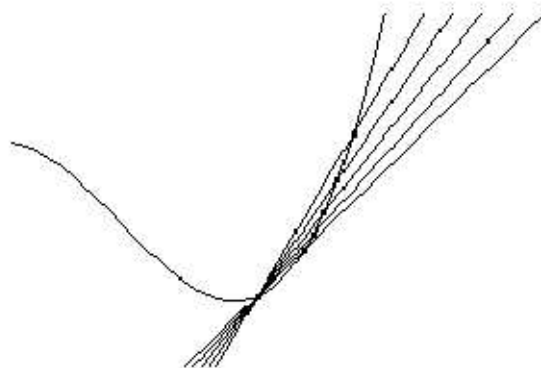


Figura 3: Construcción del haz de secantes

Aquí es importante resaltarle al alumno *el sentido de acercamiento*: todas las secantes pasan por el punto fijo dado y por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste. Se le propone que trace otras secantes sobre la misma gráfica: `SECANTE(1,20)`, `SECANTE(1,30)` y se le pregunta: “si continuamos con este proceso, ¿cuántas rectas secantes más se podrán trazar, de tal forma que pasen por el punto fijo y por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él? La respuesta esperada es que: “de esta forma se pueden trazar un número indefinido (infinito) de secantes”. El alumno que responda que “sólo se puede trazar un número finito de secantes”, involucrará que su razonamiento está motivado únicamente por lo que ve y no hace ninguna abstracción. Todavía no ha logrado percibir las propiedades geométricas del punto y la recta, lo que le impide comprender el proceso indefinido que se está describiendo. Se le motiva a que grafique más secantes para conducirlo a razonar en el respectivo proceso infinito.

Con esta última ilustración en la pantalla del ordenador, se le formula la siguiente pregunta: ¿si se continúa con este proceso que le sucedería a las secantes? La respuesta esperada es que “al continuar con el proceso, las secantes se estabilizarán sobre una línea recta que no es sobrepasada por ninguna de las secantes”. Dada esta respuesta, se puede determinar si el alumno entiende que, aunque el proceso es infinito, éste tiene *fin* (proceso de acumulación del haz de secantes). Otros alumnos pueden dar respuestas equivalentes, entendiendo la estabilización como un “tope”, como “el final” de un proceso, o más importante aún, que la “tangente es el límite del haz de secantes”.

Hay que distinguir dos tipos de razonamiento en los alumnos. Algunos perciben que la estabilización se puede alcanzar, después de haber trazado un número finito de secantes, dando a entender claramente que su razonamiento está influenciado por lo que están viendo en la pantalla del ordenador. Otros, que esta estabilización se alcanza al final de un proceso indefinido (infinito), exhibiendo un razonamiento más avanzado.

Cabe resaltar que el alumno puede obtener las mismas conclusiones trazando secantes desde la izquierda del punto fijo. Se recomienda cambiar el color de las secantes, para poder estudiar la zona en la cual los dos haces *parecen* juntarse. El alumno debe inferir que la *supuesta* recta de estabilización (tangente) separa los haces de secantes.

4 Concepto imagen de tangente

Es importante explorar lo que el alumno piensa acerca de la tangente y en qué situaciones visualmente la identifica [3]. Comenzamos esta exploración graficando las siguientes ecuaciones:

$$G(x) := \text{IF}(x < -0.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$F(x) := 0.5x - 2$$

Luego, se hace la pregunta: ¿qué relación existe entre la curva y la recta? La respuesta esperada es: “la recta corta a la curva”, o alguna otra expresión equivalente. Algunos alumnos responderán: “la recta es tangente a la curva”, y al pedirles explicación, darán como respuesta: “la recta y la curva tienen un solo punto de contacto”. El profesor debe continuar la exposición, sin hacer ningún comentario al respecto, pues el objetivo que se persigue es que los alumnos, por sí mismos, encuentren una manera de justificar sus respuestas.

Presentamos la siguiente gráfica:

$$G(x) := \text{IF}(-3.8 < x < 1.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$F(x) := 0.5x - 2.5$$

Y nuevamente se pregunta: ¿qué relación existe entre la curva y la recta?

La respuesta esperada es: “entre la curva y la recta no existe ninguna relación, pero si la curva se prolonga, podrían cortarse en algún punto”. Algunos alumnos dirán que la curva y la recta no tienen ninguna relación y, se negarán a admitir que la curva se pueda prolongar. A estos alumnos se les sugiere que grafiquen el polinomio en un intervalo más amplio y se aseguren de esa posibilidad. Se les sugiere el intervalo $(-5, 5)$.

Ahora, se le pide que grafique las siguientes ecuaciones:

$$G(x) := 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$F(x) := 25x/82 - 73/41$$

Luego, se procede con la siguiente pregunta: ¿crees que la recta es tangente a la curva? La respuesta esperada es: “en una parte de la curva seguro que no y en la otra puede que sea tangente”. Pero, la mayoría de los alumnos responderán que la recta es tangente a la curva en la parte derecha. Al pedirles una explicación, dirán: “que la recta *toca* a la curva en un solo punto” [3], por lo tanto, están respondiendo desde su concepto imagen de tangente a una circunferencia. Estos alumnos todavía no perciben que la relación de tangencia es una propiedad local. Pero es necesario que comprendan esta propiedad y logren reformular su concepto imagen. Por lo tanto, se les pide que dibujen la curva por trozos, con las siguientes instrucciones:

$$G(x) := IF(-5 < x < -1, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$F(x) := 25x/82 - 73/41$$

$$G(x) := IF(-1 < x < 5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$F(x) := 25x/82 - 73/41$$

Y para cada caso se pregunta: ¿es la recta tangente a la curva? La respuesta generalizada es: “la recta corta la curva en la primera situación y es tangente en la segunda”. Es necesario señalarles que en cada caso, se están viendo trozos de la misma curva y la misma recta. Luego, el profesor preguntará: ¿si la *recta fuera tangente* a la curva en alguno de sus puntos, se podría dar el caso que a la vez fuera tangente en algunos puntos y en otros secante? Se finaliza la exploración del concepto imagen con la siguiente pregunta: ¿cómo podríamos estar siempre seguros de que una recta es tangente a una curva? El propósito de las preguntas anteriores es que el alumno comprenda el aspecto de la *localidad* de la tangencia.

5 Relación haz de secantes – tangente

Los objetivos que el alumno debe lograr son:

- Percibir que el concepto de recta tangente a una curva es más amplio que el de tangente a una circunferencia.
- Entender la necesidad del *proceso de aproximación* para asegurarse cuándo una recta es o no tangente a una curva en un punto dado.
- Verbalizar una definición adecuada de tangente, partiendo del mecanismo del haz de secantes.

Para que el alumno comience a reevaluar el concepto imagen de tangente a una circunferencia se usa la Figura 4, que se obtiene con la instrucción $[x^3, 0, 0]$. Luego, el profesor hace el siguiente comentario: “se observa una curva y una recta que tienen solamente un punto de corte”.

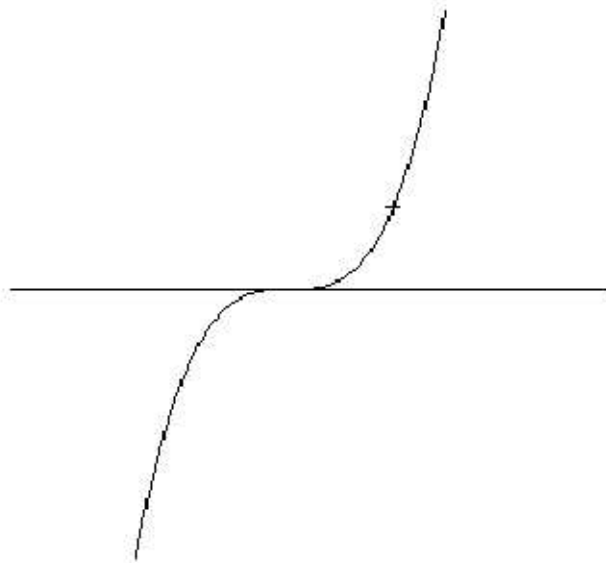


Figura 4: Tangente que corta la curva

Y formula la siguiente pregunta: ¿crees que la recta es tangente a la curva en el punto de corte? La respuesta esperada es que “sí”. Al ver la gráfica, el alumno que razona desde la parte visual argumentará que la

curva y la recta “coinciden en un segmento”, y por lo tanto, tienen más de un punto en común y la recta no puede ser tangente. Otros alumnos ven la curva dividida en dos partes, una por debajo de la recta y la otra por encima, manifestando que la recta es tangente a cada una de estas dos partes por separado, pero no a la curva en el punto señalado. Aquí, el profesor escucha los comentarios sin emitir ningún juicio. Antes de presentar la próxima gráfica, se le pregunta al alumno si puede describir un método que permita *determinar* si una recta dada es o no tangente a una curva en un punto dado.

Las siguientes graficas tienen como objetivo hacer que el alumno comience a relacionar el mecanismo del haz de secantes con la tangente. Se le pide que grafique las siguientes ecuaciones:

$$F(x) := \text{IF}(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$T(x) := (F(0.1) - F(0.25))/(0.1 - 0.25)(x - 0.1) + F(0.1)$$

El profesor hace la siguiente afirmación: “*la recta pasa por un punto de la curva*”. En lo que respecta con el cambio del concepto de definición [3], esta afirmación es importante, lo cual se comprobará cuando se dibujen haces de secantes que pasen por ese punto. El hecho de que una recta pase por un punto de una curva y tenga la “apariencia” de ser tangente, no garantiza la tangencia. Con estas gráficas en la pantalla del ordenador, se pregunta al alumno: ¿crees que la recta es tangente a la curva? ¿por qué? La respuesta esperada es que “partiendo solamente de lo que se ve en la gráfica no es posible determinarlo”. La mayoría de los alumnos responden que “sí” y dan como argumento que la recta pasa por un punto de la curva. Independiente de las respuestas que se obtengan, se les pide que ejecuten las siguientes ordenes: `SECANTE(1,5)`, `SECANTE(1,10)`, `SECANTE(1,30)`, etc. Para una mejor distinción entre la curva, la recta dada y las secantes, se utiliza el comando *Opciones* en la ventana gráfica que permite fijarle un color distinto a las secantes.

El hecho de dibujar los haces de secantes de forma progresiva le ayudará al alumno a entender que el proceso es indefinido y secuencial. Al ejecutar la última orden dada, se le pide que describa lo que observa. Luego se le pregunta: ¿qué significa el hecho de que la primera recta trazada esté *dentro* del haz de secantes? Es importante que al alumno le quede la *sensación* de que no se puede fiar de lo que ve, y que para poder emitir un juicio al respecto debe acudir al proceso del haz de secantes.

Con las siguientes expresiones, se obtiene la misma curva y dos rectas distintas que pasan por el mismo punto de ella.

$$F(x) := \text{IF}(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))$$

$$T(x) := ((F(0.1) - F(0.18))/(0.1 - 0.18)(x - 0.1) + F(0.1))$$

$$N(x) := 9(305x - 1007)/5000$$

Luego se hacen las siguientes preguntas: ¿es posible que las dos rectas sean tangentes a la curva en el punto en cuestión? ¿es posible que ninguna lo sea? En todo caso, ¿cómo se podrá salir de dudas?

Después de las anteriores preguntas muchos alumnos manifestarán que la forma de saber si las rectas son o no tangentes, es trazando un haz de secantes que pase por el punto en cuestión y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos al punto dado. Se les sugiere dar la orden `SECANTE(1,20)` y que describan lo que ven en la pantalla. Las secantes dibujadas con esta orden superan la primera recta, pero no la segunda. Con esta ilustración, y a partir de la experiencia anterior, dirán que la primera recta es secante. Se les pregunta: ¿cómo será posible salir de dudas acerca de la tangencia, o no, de la segunda recta? Se les sugiere que ejecuten las siguientes ordenes: `SECANTE(1,30)`, `SECANTE(1,50)`, `SECANTE(1,100)`, entre otras.

Para cada caso, se le solicita al alumno que describa el proceso que está haciendo y se le pregunta: ¿qué le sugiere el hecho que el haz de secantes *parece estabilizarse* sobre la segunda recta? En este momento, el alumno debe comprender que lo que realmente garantiza que una recta sea tangente a una curva en un punto es, además de tocar o cortar, ser el *final* –el límite– del proceso indefinido (infinito) del haz de secantes.

Es importante señalar que se pueden diferenciar dos tipos de razonamientos relacionados con la estabilización del haz de secantes: los alumnos que razonan desde la parte visual afirmarán que ese *final* se obtiene después de trazar un número finito de secantes, mientras que otros alumnos con un razonamiento más avanzado comprenderán el *final* (la tangente) como la *estabilización* de un proceso indefinido (infinito).

La siguiente pregunta explora el progreso del lenguaje en el alumno a lo largo de la experiencia: ¿es posible que en algún caso *especial* la tangente corte a la curva en el punto de tangencia? La respuesta esperada es “sí”. Además, algunos alumnos darán como ejemplo la gráfica $[x^3, 0, 0]$, estudiada anteriormente. Para confirmar este caso especial, se definen las siguientes fórmulas en el editor de *DERIVE*®:

$$a := 0$$

$$F(x) := x^3$$

$$G(x) := 0$$

Y se comienza a efectuar el proceso de aproximación con las siguientes ordenes: `SECANTE(1,5)`, `SECANTE(1,20)`, `SECANTE(1,50)`, entre otras.

Al finalizar cada orden se pregunta: ¿cuál será la dirección de la recta en la cual se estabilizarán las secantes? El alumno que comprenda que la tangente es una recta de estabilización, aceptará sin mayor dificultad que ésta puede cortar a una curva en el punto de tangencia. Aquí es necesario que el profesor haga un aporte de información confirmándole al alumno que la recta señalada es tangente a la curva en el punto dado. Es posible que la mayoría de alumnos, en este momento, pueda encontrar la dirección de la tangente, cuando ésta exista, a una curva cualquiera en uno de sus puntos. Para confirmar esto, se propone que grafiquen la siguiente función: $F(x) := x^2$

Y luego, se hace la siguiente pregunta: distinguiendo entre vertical, horizontal u oblicua, ¿cuál será la dirección de la tangente a la curva en el punto más bajo? La mayoría de los alumnos dirá que es horizontal. Luego, se les solicita justificación a su respuesta. Si han entendido el proceso, responderán: “porque al ubicarnos en el punto más bajo, tomar otro punto sobre la curva y efectuar el proceso del haz de secantes por puntos cada vez más próximos al punto elegido, el proceso indefinido (infinito) del haz de secantes se estabilizará en una recta horizontal”. El alumno que no ha entendido el proceso y razona desde lo visual dirá: “que la tangente en el punto más bajo es horizontal, puesto que por ese punto es *fácil* trazar una recta que toque la curva en ese punto”. Esto significa que el alumno no ha superado el concepto imagen de tangente a una circunferencia. Y más aún, no ha comprendido que el mecanismo del haz de secantes es el proceso que permite saber con *certeza* (en este caso) la dirección de la tangente a la curva en el punto señalado.

La orden: $F(x) := \text{If}(x < 0, -(-x)^{(1/3)}, x^{(1/3)})$, se acompaña con la pregunta: ¿existe la recta tangente en el punto *central* de la curva? Si la respuesta es afirmativa, el alumno debe determinar si la dirección es vertical, horizontal u oblicua. En todos los casos el alumno puede verificar su respuesta, ejecutando las ordenes: **SECANTE(1,5)**, **SECANTE(1,20)**, **SECANTE(1,50)**, etc. Esto permitirá que el alumno considere nuevamente la tangente como el proceso de estabilización del haz de secantes. Esta es otra situación especial en la cual la tangente corta a la curva y su dirección es vertical. El alumno que continúe razonando desde su concepto imagen de tangente a una circunferencia manifiesta que la curva no tiene tangente en ese punto, argumentando que cualquier recta que pase por ese punto cortará la curva.

6 Definición de tangente

El lenguaje empleado por un alumno para referirse a un concepto matemático específico es uno de los indicadores del nivel de razonamiento en el cual se encuentra respecto del concepto estudiado. Es por ello que la siguiente pregunta la formulamos sin referencia a ninguna gráfica en particular: supongamos que disponemos de un instrumento adecuado para trazar sucesivas secantes que pasen por un punto de una curva y *por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste*, ¿cuál será un método adecuado para trazar la tangente a la curva en ese punto? A continuación comentamos algunos tipos de respuestas de los alumnos.

6.1 Respuestas adecuadas

“Trazar secantes que pasen por el punto dado y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él. La tangente es aquella recta a la cual se aproximan las secantes cuando se estabilizan”. Con esta respuesta, u otras equivalentes, el alumno manifiesta claramente que hace un uso riguroso del lenguaje matemático y entiende que la tangente a una curva en un punto es el *final* de un proceso de aproximación indefinido (infinito); está manifestando que su razonamiento es avanzado respecto del concepto de tangente a una curva en un punto. El alumno ha hecho una cadena de elaboraciones mentales que le permite percibir este concepto como un proceso dinámico (paso al límite). Por lo tanto, es posible asegurar que el alumno comprenderá la formalización del concepto en el momento que se exponga a esa nueva situación. Es importante resaltar, que el lenguaje utilizado en la respuesta es una manifestación de la integración del concepto imagen y el concepto definición de tangente [1].

6.2 Respuestas de alumnos que no han superado el concepto imagen de tangente a una circunferencia

- a. “Dibujar una recta por el punto dado y luego trazar secantes para ver si se estabilizan en la recta inicialmente dibujada”. Esta respuesta no es adecuada porque el alumno no ha entendido que la tangente es el final del proceso de estabilización del haz de secantes. Sin embargo, sí ha entendido que el proceso del haz de secantes sirve como un mecanismo para confirmar si una recta dibujada es ó no tangente a una curva en un punto.
- b. “Trazar secantes hasta que una de ellas toque la curva en el punto dado”. Los alumnos que responden de esta manera no comprenden

que el proceso del haz de secantes se efectúa partiendo del punto fijo dado y por otros sobre la curva cada vez más cercanos a este. Tampoco comprenden que el mecanismo del haz de secantes es un proceso de aproximación y continúan razonando desde su concepto imagen de tangente a una circunferencia. Es decir, no perciben la noción de límite subyacente e inherente al concepto de tangente.

7 Ejercicios de confrontación

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo detectar si los alumnos aplican la definición dada por ellos mismos. También, *forzarlos* para que exhiban su capacidad de razonamiento en el momento de determinar la existencia ó no de la tangente en algunos puntos particulares de curvas especiales.

Inicialmente se considera la siguiente curva $F(x) := 2|x|^{1/2}$ que se obtiene con la orden $F(x) := 2\text{SQRT}(\text{ABS}(X))$. Luego se formula la pregunta: ¿cuál es la dirección de la recta tangente en el punto más bajo? La respuesta esperada es: “la dirección es vertical”. Se le pide que confirme sus respuestas dando alternadamente las ordenes $\text{SECANTE}(1, n)$, $\text{SECANTE}(-1, n)$, sugiriendo valores grandes de n (dependiendo de la capacidad del ordenador).

El siguiente caso a considerar es la tangente a la curva $F(x) := x$ en uno de sus puntos. Aquí se presenta una enorme dificultad, pues la mayoría de las veces el alumno no comprende que *la recta es tangente así misma en cada uno de sus puntos*. Cuando confirma este hecho, su actitud es de total desconcierto, mostrándose incrédulo. Es importante señalar algunas dificultades que el alumno hace evidentes: no considera una línea recta como un caso especial de una curva; al aplicar el mecanismo del haz de secantes aparece en su razonamiento una gran confusión; otra reside en el nivel de abstracción que debe de hacer para comprender esta nueva situación bien particular de tangencia; se resiste a considerar este caso, entre otras situaciones.

Con el propósito de insistir en la implementación del proceso del haz de secantes, se le solicita que grafique la línea recta $y=x$. Luego, con la orden $\text{SECANTE}(1, n)$, para varios valores de n , comience a trazar haces de secantes. Además, se le pide que explique lo que observan en la pantalla para distintos valores de n , con el propósito de que explicita con sus propias palabras este hecho.

Ahora se considera el vértice de la función valor absoluto que se obtiene con la orden $F(x) := \text{abs}(x)$. Y se hace la siguiente pregunta: si existe la tangente en el punto más bajo, ¿cuál será su dirección? Los

alumnos que continúen razonando desde el concepto imagen de tangente a una circunferencia, responden: “es cualquier recta que pase por ese punto”. Quienes hayan comprendido el proceso manifiestan: “hay dos tangentes, una para cada lado de la curva y que como no se obtiene una única recta de estabilización no hay tangente en dicho punto”. Para confirmar o corregir las repuestas dadas se les sugiere que den, alternadamente, las ordenes `SECANTE(1,n)` y `SECANTE(-1,n)` y que expliquen lo que están observando en la pantalla del ordenador.

La facilidad con la cual el alumno encuentra la dirección de la tangente a las gráficas propuestas anteriormente, la precisión en el lenguaje utilizado al dar sus repuestas; son indicadores de sí ha adquirido o no un nivel avanzado de razonamiento con respecto al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos.

Para terminar esta sección se hace una pregunta resumen, con el propósito de detectar si el alumno percibe o no las limitaciones del método del haz de secantes: ¿imaginas o recuerdas alguna curva en la cual el proceso del haz de secantes no se puede aplicar para encontrar la tangente sobre un punto de ella? Aquí lo importante es escuchar los comentarios que el alumno manifiesta, dándole prioridad al lenguaje empleado. Se le motiva a que grafique las funciones que propone y que exprese las dificultades que observa.

8 Limitaciones del método

Estudiar las limitaciones del mecanismo del haz de secantes es importante porque a partir de ellas, se evidencia la necesidad de una definición rigurosa del concepto de tangente a una curva. Esto posibilitará que el alumno pueda comprender y formalizar el concepto de derivada de una función en este punto.

En la siguiente función el aspecto visual del proceso del haz de secantes no es de gran ayuda, pues es bastante *engañoso* ya que al dibujar haces de secantes cerca al origen, éstos *parecen* tener varias zonas de estabilización. Aquí se define la constante $a:=0.1$ y la función $F(x):=x^2\text{SIN}(20/(x^2))$.

Dado lo anterior, se le indica que realice en forma consecutiva las ordenes `SECANTE(1,20)`, `SECANTE(1,30)`, `SECANTE(1,50)`, `SECANTE(1,75)`, `SECANTE(1,100)` y en cada caso se pregunta: ¿la curva tiene tangente en el punto dado? ¿cuál será su dirección? El hecho de que visualmente parezca que existan varias zonas de estabilización motiva a algunos alumnos a dudar de la unicidad de la tangente, por lo que manifiestan “que la

curva, en el punto estudiado, tiene varias tangentes". Los estudiantes que tienen un nivel avanzado de razonamiento manifiestan: "se han trazado muy pocas secantes, y que debido a las oscilaciones alrededor del punto, las secantes cambian constantemente de dirección y para determinar la dirección de la tangente se tendrían que trazar un número indefinido (infinito) de secantes". Para salir de dudas insistirán en trazar más secantes, pero en este caso no es posible obtener visualmente la respuesta.

El propósito de la pregunta es propiciar en el alumno una situación de incomodidad y conducirlo a evocar la necesidad de hallar un método que le permita determinar la tangente a una curva en un punto dado. Es decir, se pone en evidencia que el mecanismo del haz de secantes no es suficiente para conjeturar este hecho en curvas como la anterior. Es así, como se hace necesario plantear un nuevo proceso que tiene que ver con el cálculo computacional, se deben hacer aproximaciones sucesivas del valor de las pendientes de las rectas secantes obtenidas con las instrucciones dadas anteriormente. Esto es posible hacerlo fácilmente con *DERIVE*®, el cual permite obtener un listado del valor de las pendientes de las rectas secantes que pasan por un punto fijo $(a, f(a))$ y por otros puntos $(b, f(b))$ sobre la curva cada vez más cercanos a él. Para ello se digita la orden:

```
PENDIENTE(h, n) := VECTOR((F(a)-F(b))/(a-b), b,
VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n-1)))
```

9 Conclusiones

Para la asimilación de un concepto matemático se deben de tener en cuenta dos fases. Una, la visualización, que es la verdadera fase creativa y en la que los alumnos tienen un primer acercamiento al concepto sin manipulaciones algebraicas. La otra fase es la formalización del concepto, en la cual la docencia tradicional centra todos sus esfuerzos. La enseñanza centrada en esta segunda fase, no permite que los alumnos progresen en su razonamiento, como también, no logren integrar y desarrollar relaciones con los demás conceptos estudiados.

La presente propuesta metodológica está dirigida a la primera fase, pues la visualización que se obtiene a partir del mecanismo del haz de secantes, para el concepto de tangente a una curva plana en un punto de ella, permite que los alumnos tengan un primer acercamiento desde la parte geométrica, sin manipulaciones algebraicas que entorpezcan el razonamiento que involucra su construcción.

Otro logro que se alcanza es dejar a los alumnos a las puertas de entender otra manifestación de la aproximación local, como es el concepto

de derivada de una función en un punto, siendo a su vez el haz de secantes una adecuada visualización para profundizar en la comprensión de este concepto.

Un alto porcentaje de los alumnos matriculados en el primer curso de análisis de los programas de ingeniería y ciencias administrativas en la Universidad Eafit no comprende la diferencia existente entre los conceptos de derivada y recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos. Pues confunden el aspecto geométrico de la recta tangente a la curva con la formalización del concepto de derivada. En respuesta a esta situación, surgió la presente propuesta metodológica, la cual ha sido eficaz en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos en mención.

El 90% de los alumnos sometidos al proceso descrito puede verbalizar una definición correcta de recta tangente a una curva en uno de sus puntos partiendo del haz de secantes, y sólo el 5% de los alumnos que siguen el curso de análisis con la metodología tradicional da una definición de tangente a una curva en un punto a partir del concepto de derivada.

Referencias

- [1] P. V. Esteban, *Estudio Comparativo del Concepto de Aproximación Local Vía el modelo de van Hiele*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.
- [2] J. L. Llorens, P. Pérez Carreras, An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* 28, No. 5, pág 713-726, 1997.
- [3] S. Vinner, The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics, *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Ac. Pub, Cap. 5, pág 65-81, 1991.

Dirección de los autores: Pedro Vicente Esteban Duarte Universidad EAFIT, Colombia. pesteban@eafit.edu.co — Pedro Pérez Carreras Universidad Politécnica de Valencia, España. pperezc@mat.upv.es

Escuela Regional de Matemáticas

Universidades de Nariño, del Cauca, del Valle, del Quindío, Tecnológica de Pereira, EAFIT, de Antioquia, Surcolombiana, de Medellín, de la Amazonía.



Por el desarrollo de las Matemáticas
desde una perspectiva regional.

Revista de Matemáticas de la E.R.M.
Departamento de Matemáticas, Univalle,
Apartado Aéreo 25360 Cali.
Teléfonos: (2) 330-25-66 339-32-27.
FAX: (2) 330-25-66.
Página web: <http://revistaerm.univalle.edu.co/>
e-mail: revistaerm@univalle.edu.co

El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos

César Augusto Delgado G

Resumen

En este artículo se aplica el modelo para el análisis de la variación conceptual propuesto por Stephen Toulmin. Este modelo resulta útil y propio para el estudio epistemológico de los conceptos matemáticos necesario para el diseño de situaciones y experiencias didácticas. Para ilustrar su funcionamiento, estudiamos la variación del concepto del continuo matemático considerando tres momentos de la historia de los griegos antiguos, desde Pitágoras (500 a.C.) hasta Arquímedes (212 a.C.), con la pretensión de identificar los problemas y obstáculos que surgieron en la génesis del continuo matemático, las respuestas que se alcanzaron en la época, sus limitaciones y los problemas que quedaron abiertos como tarea para los matemáticos posteriores. El contenido se divide en tres partes: La primera presenta el modelo de Toulmin; en la segunda presentamos un estudio de la historia del concepto del continuo matemático en el período griego y en la tercera aplicamos el modelo al estudio de la evolución del continuo en el período griego. Finalmente, se identifican algunos obstáculos epistemológicos presentes en la época.

Palabras y frases claves: filogénesis, obstáculo epistemológico, variación conceptual, continuo numérico.

Introducción

Compartimos la hipótesis de que existe una relación entre la evolución conceptual en el aula y en la ciencia. Tanto en la escuela como en la comunidad matemática el conocimiento no surge de forma milagrosa, transparente, inmediata, de una vez y para siempre. Todo lo contrario, la aproximación epistemológica de la matemática muestra la lenta variación del *estatuto* de una noción. Así, como los problemas que constituyeron su fuente, los obstáculos que hubo que salvar y las dificultades conceptuales evacuadas para alcanzar su solución.

La constitución de una nueva noción implica la superación de un conocimiento anterior que ha tenido éxito en el pasado, pero que ahora se revela insuficiente para obtener las respuestas a las nuevas cuestiones generadas por problemas igualmente inéditos que se deben resolver. Estas superaciones no son ni inmediatas ni plenas, sino que se debe vencer cierta

inercia de concepciones antiguas, que en la sombra dirigen las acciones y los razonamientos.

En el caso de la matemática la hipótesis es válida. Por un lado, el *estudio filogenético* de los conceptos revela que los conceptos sufren un proceso lento de institucionalización¹ en el que intervienen *factores internos* de la matemática como disciplina científica y externos de los entornos social, cultural y científico de la época. Por otro lado, el *estudio ontogenético* de los conceptos, realizados por los didactas, muestra que los procesos de construcción de los esquemas conceptuales asociados a los conceptos matemáticos son igualmente lentos y son regulados por *factores internos* propios de la naturaleza del aprendizaje humano y *externos* ligados a las instituciones pedagógicas, científicas, estatales, etc., que imponen restricciones sobre el funcionamiento de la institución educativa.

En el caso de la *filogénesis*, factores externos como los paradigmas filosóficos de la época, el contrato social, los intereses socio-económicos, etc., combinados con los factores internos como los conocimientos disponibles, las técnicas conocidas, los sistemas de representación simbólica, etc., hacen que los conocimientos establecidos, que han tenido cierto éxito en el pasado, se revelen insuficientes para alcanzar una explicación satisfactoria para las nuevas cuestiones cuyas respuestas se perciben como necesarias. La lentitud, entonces, no se explica por la negación al progreso de la ciencia en un momento dado, ni por la displicencia social hacia las comunidades científicas, etc.; sino, más bien, que estos señalamientos son efectos causados por algo más profundo e “invisible” que permanece en “la sombra” de las acciones y los razonamientos individuales y que llega a ser socialmente compartido. Se trata de *representaciones de conocimientos matemáticos* que circulan en la época, que han tenido éxito en el pasado, pero que impiden asimilar el nuevo conocimiento. Para progresar, es necesario modificar estas representaciones que se han convertido en verdaderos obstáculos epistemológicos en el sentido de Bachelard:

“...hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos ex-

¹Entendiendo por institucionalización, el proceso que va desde la presencia implícita de un conocimiento en las acciones o razonamientos que son constituyentes de la actividad humana en un momento dado (estatuto protomatemático); pasando, luego, a ser reconocido como un instrumento útil en la matemática, pero no es objeto de estudio en sí mismo (estatuto paramatemático); y finalmente, se toma conciencia de su función en un cuerpo teórico, y por tanto de la necesidad de hacerlo objeto de estudio para articularlo de forma coherente con los conocimientos establecidos, hasta alcanzar su aceptación por la comunidad científica (estatuto matemático).

ternos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones... se conoce en contra de un conocimiento anterior destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización.” ([1, pág.15]).

Similarmente, en el caso de la ontogénesis, factores externos como el entorno social, el curriculum matemático, la organización didáctica de la enseñanza, las concepciones de los docentes respecto de la matemática, etc., combinados con los factores internos de la propia naturaleza del conocimiento matemático objeto de enseñanza, *inducen representaciones* de los conceptos matemáticos que se convierten en obstáculos epistemológicos presentes en los razonamientos y ejecuciones de los estudiantes. Los fracasos y los errores persistentes, señal de su presencia, no se explican por las actitudes de los estudiantes hacia la matemática; ni por los métodos empleados por sus profesores; sino que, estas pseudo-explicaciones son más bien consecuencia, en última instancia, de aquellas *representaciones epistemológicas* que orientan y determinan éstas actitudes y aquellos métodos.

El análisis epistemológico en sus dos vertientes filogenética y ontogenética permite

“... al didacta tomar distancia y controlar las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas por la enseñanza ... [...], desprenderse de la ilusión de transparencia de los objetos que manipula en el nivel del saber y en consecuencia lo auxilia en el manejo de las representaciones erróneas inducidas por la enseñanza” ([7, pág. 15])

Para abordar este estudio empleamos el modelo de análisis de Stephen Toulmin (1977) donde se plantea que para explicar la *evolución y racionalidad* de la empresa científica es necesario no sólo referirse al objeto de estudio en el que se centran las actividades de una disciplina en particular sino también a las actitudes profesionales por las que se guían esas actividades.

Objeto y actitudes profesionales definen entonces adecuadamente los problemas de que se ocupa una “disciplina” en un momento dado. Lo que se destaca en esta perspectiva es que las respuestas a la pregunta de cómo surgen los problemas en la ciencia y cómo se resuelven, involucra la “praxis”, vale decir, *la acción* de sujetos producto de su cultura, prisioneros de actitudes, hábitos, creencias, limitados por conocimientos e

instrumentos técnicos de la época. Ellos buscan escapar de estas “prisiones” mentales superando sus propios esquemas de conocimiento. *Significa entonces involucrar, además de la actividad teórica y a diferencia de ella, la actividad que es intrínsecamente transformadora de la realidad exterior al sujeto sobre todo pero también transformadora del propio sujeto.*

“Para formular el punto en términos generales: los problemas de la ciencia nunca han estado determinados por la naturaleza del mundo solamente, sino que han surgido siempre del hecho de que, en el campo involucrado, nuestras ideas sobre el mundo están en conflicto con la naturaleza o unas con otras.” ([10, pág. 160])

De esta manera la tarea de la ciencia es resolver los problemas que plantean tales conflictos, para aproximar o disminuir la distancia entre las “ideas corrientes” que tenemos sobre el mundo, sus posibilidades para actuar sobre él y nuestros “ideales intelectuales” razonables.

“Los problemas surgen (sostengo) cuando nuestras ideas sobre el mundo están en conflicto con la naturaleza o entre sí, esto es, cuando nuestras ideas corrientes quedan atrás, en algunos aspectos remediables, de nuestros ideales intelectuales.” ([10, pág. 160])

Lo que para nosotros es importante aquí es precisamente la relación que establece Toulmin entre los problemas conceptuales de la ciencia y su fuente: el conflicto cognitivo entre las ideas mismas o entre ellas y la experiencia. Es decir:

“Los problemas conceptuales en la ciencia provienen de la comparación, no de “proposiciones” con “observaciones”, sino de ideas con la “experiencia”. Nuestras presentes facultades explicativas deben ser juzgadas a la luz de las ambiciones y los ideales intelectuales relevantes. Y no se puede definir apropiadamente la naturaleza de los “problemas” científicos sin considerar también el carácter de esos ideales.” ([10, pág. 160-161])

Por “ideales intelectuales” (I) de una ciencia se entiende, según él, aquellas concepciones muy generales compartidas por la comunidad de la disciplina acerca de la *forma general que debe tomar una explicación completa de cierto fenómeno*, para poder explicar *perfectamente* las relaciones que lo definen, y ello es posible porque se comparte cierto objetivo comunal. Y son ideales porque desde su perspectiva la realidad sólo se conoce por aproximaciones sucesivas y siempre superables.

Para satisfacer tales ideales la comunidad científica dispone del patrimonio, que hereda de la experiencia histórica: teorías, conjeturas, conceptos, instrumentos técnicos, etc. Lo así heredado, junto con los intereses de la época y las formas de aproximación al mundo constituyen la “capacidad corriente” (C), disponible para lograr la inteligibilidad necesaria y suficiente.

El desequilibrio que se produce en determinado momento entre el ideal y la capacidad da origen a conflictos que son la fuente del planteamiento de un nuevo problema (P) a resolver, es decir:

Problemas científicos = Ideales explicativos–Capacidades corrientes.

Así pues, el desequilibrio entre I y C es la fuente de los conflictos que se constituyen en problemas para la comunidad científica y el motor del progreso de la empresa científica es la búsqueda, siempre incompleta, de nuevas re-equilibraciones entre I y C.

Respecto a la forma de la evolución de los problemas, Toulmin afirma que ella es secuencial y continua, sin importar el cambio que sufren, de época en época, los conceptos y técnicas reales para resolverlos; los cambios no resultan de “saltos” repentinos, sino de la acumulación gradual de modificaciones menores, que son capitalizadas por la experiencia cultural. Por tanto, interesa observar las exigencias locales e inmediatas de cada situación intelectual y las ventajas ligadas a diferentes novedades conceptuales. Tales exigencias son específicas de la situación; la sucesión de problemas que se generan entre ellas y la capacidad para satisfacerlas no obedece a los dictados externos de la lógica, sino a hechos históricos transitorios y propios de la situación problemática particular. Por tanto, la fuente de los problemas científicos se encuentra en la relación histórica entre las actitudes de los científicos profesionales y el mundo de la naturaleza que estudian.

Bajo estos supuestos fundamentales Toulmin propone como unidad de análisis la variación conceptual, focalizando la atención en las cuestiones que se levantan de una época a otra, sus debates y las soluciones propuestas.

1 El modelo de Toulmin

Para encontrar explicaciones a la evolución y racionalidad de la empresa científica, Stephen Toulmin concibe un metasistema análogo al usado en biología para el estudio de poblaciones. En este caso los conceptos de una ciencia, que coexisten en un tiempo determinado. De manera semejante a la explicación darwinista de la especiación en términos de variación y

selección, se considera que los conceptos existentes en un momento dado pueden ser concebidos como producto de un proceso dual de “*variación conceptual*” y “*selección*”, que perpetúa “*variantes conceptuales*”. Toulmin considera que el cambio conceptual es la unidad básica de la dinámica científica. Para abordar su estudio de tal manera que tanto los factores racionales como causales sean tenidos en cuenta propone una alternativa de análisis (C) que combina dos de los tipos de análisis posibles: transversal (A) y longitudinal (B).

El *análisis transversal* consiste en considerar conjuntos representativos de *todos* los conceptos presentes en épocas sucesivas del desarrollo de una ciencia. La virtud de este análisis es que permite el estudio racional del cambio desde el punto de vista lógico formal que plantea la relación entre los conceptos en cada época; su debilidad es que la explicación de la aparición de nuevos conceptos y el abandono de otros, que se observa al comparar los conjuntos representativos sucesivos, no se puede obtener del análisis lógico formal de los conceptos de cada conjunto representativo. La causalidad de los cambios conceptuales se refiere a “los cambios “no lógicos” entre conjuntos representativos de conceptos, es decir a las condiciones en que podemos decir que se ha agregado un nuevo concepto o se ha desplazado uno viejo *por buenas razones*”([10, pág. 209]).

El *análisis longitudinal* consiste en estudiar la aparición, desarrollo y destino ulterior de conceptos particulares a lo largo de toda la historia de vida del concepto. Este análisis permite identificar cada punto de ramificación o de interrupción de la línea genealógica y pone en evidencia las “buenas razones” que en el momento se expresan para aceptar o rechazar un concepto. La debilidad de esta dimensión de análisis consiste en que “no logra diferenciar los dos aspectos complementarios del cambio conceptual: I) la introducción en el debate en curso de variantes conceptuales cuyo mérito aún no ha sido evaluado y II) la incorporación en el repertorio de variantes seleccionadas” (idem). Esta no discriminación está presente, porque para alcanzarla es necesario el análisis lógico formal de los conceptos en cuestión. Pero este análisis no es posible sin tomar en cuenta un conjunto representativo de conceptos relacionados.

Toulmin propone entonces adoptar un modelo en el que se tome en cuenta los *conceptos principales* que definen los conjuntos conceptuales representativos de una ciencia y considerar como variables del cambio el *aspecto racional* que provee el análisis transversal (explica la selección) y el *aspecto causal* que se obtiene del análisis longitudinal o genealógico (variación o causalidad del cambio) y explica las *buenas razones* de la selección. La combinación de estas dos variables da como

resultado una tercera variable evolutiva, dependiente de las dos anteriores, que permite alcanzar las explicaciones de la evolución conceptual. En resumen, el modelo de Toulmin se define en términos de tres variables: A) *Representación transversal*, B) *Representación longitudinal* y C) *Representación evolutiva*.

Representación Evolutiva (C)

Aborda la evolución de los conceptos (C) como función de A) La variable que da información de los conjuntos a los que pertenecen los conceptos principales vigentes en el tiempo t_i y cuya relación modifica o puede modificar el concepto C^y objeto del estudio; y B) la variable que da cuenta de la racionalidad de los conceptos principales dando cuenta de los conflictos, justificaciones o rechazo de los conceptos. El análisis de la tripla (A, B, C) “ofrece la gran ventaja de señalar claramente las diferencias entre innovación y selección” (Idem págs 209). Establecidas las repre-

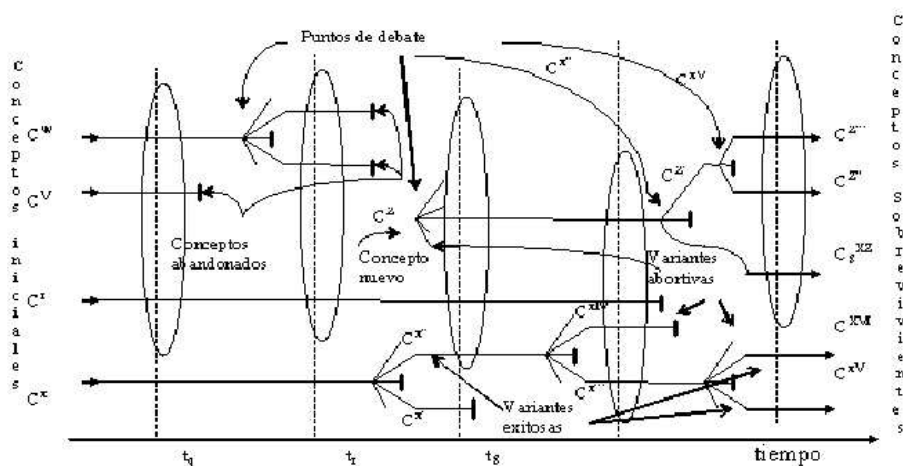


Figura N° 1: (C) Representación evolutiva

sentaciones se debe intentar responder a tres conjuntos de preguntas “que permitirán elaborar un cuadro del cambio conceptual como un proceso histórico, en el que son operativos tanto los factores racionales como los causales” (Idem. pág. 212).

A) Respecto a la innovación o variación conceptual. Se refiere a las preguntas que permiten establecer las consideraciones y factores de la innovación conceptual.

1. ¿En qué circunstancia aparecen las innovaciones conceptuales, en una disciplina particular o en muchas?
2. ¿En qué condiciones el ingreso de tales variantes será vigoroso o lento, o más vigoroso en una disciplina que en otra?
3. Si la variación conceptual se produce predominantemente en ciertas direcciones preferidas, ¿Qué factores o consideraciones son responsables por la elección de esas consideraciones?

B) Con respecto a las cuestiones concernientes a los procedimientos de selección. Se refiere a los procedimientos de selección por los que se aceptan algunas variantes, se rechazan otras y se ponen en reserva otras aún, a la espera de una prueba adecuada. Por ejemplo:

1. ¿Qué tipos de factores o consideraciones determinan cuáles de las variantes conceptuales son aceptadas y, por ende, ingresan al repertorio establecido?
2. ¿En qué medida reposa esa selección en apelaciones explícitas a consideraciones cuya relevancia y fuerza persuasiva son colectivamente reconocidas dentro de la profesión?
3. ¿Podemos dar una explicación satisfactoria de los criterios por los cuales los que practican una ciencia distinguen los cambios conceptuales bien fundados y apropiadamente justificados de los cambios mal concebidos, apresurados, retrasados o no intencionales?

C) Respecto a la relación entre cambio conceptual y unidad de la ciencia. Toulmin considera, por último, conjuntamente dos aspectos A y B de los cambios conceptuales:

1. ¿En qué circunstancias el equilibrio entre la variación y la perpetuación selectiva servirá para mantener la continuidad de una disciplina única y compacta?
2. ¿En qué circunstancias conducirá, en cambio, al abandono de una disciplina anterior o a su desplazamiento por dos o más disciplinas sucesoras?

Una vez que se responda a este conjunto de preguntas se está en capacidad de clasificar los cambios conceptuales. Para ello se debe tener en cuenta que los conceptos son el resultado de soluciones, acertadas o no, parciales o totales, a problemas que se plantea la comunidad científica. Toulmin

entiende los problemas (**P**) que surgen en la investigación científica como el resultado de la diferencia entre los ideales explicativos (**I**) planteados por la necesidad de comprender un fenómeno y la capacidad (**C**) real para lograr la inteligibilidad necesaria y suficiente, es decir:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}$$

Toulmin distingue quince tipos de variaciones conceptuales en función de cinco tipos de problemas y tres modos de resolverlos. Respecto a los tipos de problemas dice:

“Consideremos por turno las cinco clases típicas de fenómenos. a) Siempre hay ciertos fenómenos que la ciencia de la naturaleza puede esperar razonablemente explicar, pero para los que ningún procedimiento disponible proporciona todavía un tratamiento exitoso... b) Siempre hay fenómenos que pueden ser explicados hasta cierto punto usando procedimientos explicativos corrientes, pero con respecto a los cuales los científicos desearían explicaciones más completas o más precisas... c) Comprende los problemas que se presentan cuando consideramos la mutua relación de diferentes conceptos coexistentes en una misma rama de la ciencia... d) Incluye los que conciernen a la mutua relación de conceptos de diferentes ramas de la ciencia... e) Estos problemas surgen de conflictos entre conceptos y procedimientos corrientes, de las ciencias especiales y las ideas y actitudes corrientes entre la gente en general”.(Idem. pág. 187-188).

Respecto a los modos de resolver problemas dice:

“En teoría, en todo caso, se puede comenzar a resolver problemas de cualquiera de los cinco tipos principales examinados en el capítulo anterior en cualquiera de tres modos alternativos: 1) refinando la terminología, 2) introduciendo nuevas técnicas de representación o 3) modificando los criterios para identificar casos a los que sean aplicables las técnicas corrientes”. (Idem. pág. 215)

Se tomará en consideración la tipología del cambio dada establecida por [6, pág. 371]. De acuerdo a ella consideramos los tipos (PxS_i : problema de tipo x , Solución de tipo i):

PaS_1	PbS_1	PcS_1	PdS_1	PeS_1
PaS_2	PbS_2	PcS_2	PdS_2	PeS_2
PaS_3	PbS_3	PcS_3	PdS_3	PeS_3

Explicación del cambio conceptual.

“Una vez descritos y clasificados los cambios, Toulmin introduce elementos explicativos que nos ofrecen criterios de selección de conceptos constituyendo el aspecto normativo de los modelos de cambio científico. Para que tenga lugar el cambio Toulmin propone unas condiciones previas que son simples posibilidades que pueden o no hacerse realidad. Por condiciones previas entiende los foros profesionales de discusión. A continuación examina los factores internos y externos que intervienen en el cambio. Como factores internos cita los modelos matemáticos, las técnicas experimentales, la invención de instrumentos, la importación de las ideas de otra ciencia básica, y el reconocimiento de nuevos principios de clasificación. En cuanto a los factores externos Toulmin cita el ejercicio de la propia curiosidad y en general todo lo que tenga que ver con factores sociológicos. Ve los factores internos y externos como dos filtros que influyen independientemente en el cambio conceptual, a veces coinciden (es lo más positivo para el progreso de la ciencia) a veces se oponen. Lo importante es la relación entre unos y otros factores. La frase los factores sociales son necesarios pero los intelectuales son cruciales resume la idea de Toulmin sobre la interrelación entre ambos factores” (Idem. pág. 373-374).

2 El período de los griegos antiguos (500-212 A.C.)

Para identificar los problemas que se plantea la comunidad matemática en este período y cuya solución genera la evolución conceptual del continuo matemático, describiremos brevemente los principales hechos que constituyeron el punto de partida para el largo proceso de su constitución rigurosa. Nuestra indagación se orienta a identificar los obstáculos epistemológicos que, en la época, hicieron lenta la solución de los problemas y cómo ellos fueron superados.

Los griegos antiguos plantearon el problema del continuo al preguntarse: ¿qué relación existe entre lo discreto y lo continuo? En principio los Pitagóricos entrevieron audazmente un isomorfismo entre los puntos de la recta y los números. Tanto las figuras geométricas como los números constituían abstracciones producidas por la mente distintas de los objetos físicos. Esta manera de diferenciar lo abstracto y lo concreto les permitió descubrir una armonía entre el mundo abstracto de las ideas y el universo físico.

“Estaban sorprendidos por el hecho de que los fenómenos que eran de muy diferente forma desde el punto de vista cualitativo, pre-

sentaban propiedades matemáticas idénticas. Por lo tanto, las propiedades matemáticas deberían ser la ciencia de tales fenómenos” ([9, 1992, pág. 203]).

Así, imaginaron un Universo infinito en un estado constante de cambio y permanencia. El secreto para la comprensión de este Universo estaba en descubrir los términos ocultos y las conexiones que creaban simultáneamente los modelos de unidad y cambio.

En su deseo de encontrar un primer principio ellos sostuvieron, que los números constituyen el universo entero. El concepto de número que manejaban los pitagóricos era el de

“una progresión de multitudes comenzando en una unidad y una regresión que terminaba en ésta” ([8, pág. 69-70])

Es decir, un número representaba una clase de agregados y por tanto era discreto. La unidad era indivisible y constituía la esencia del universo.

A pesar de poseer tan limitado concepto de número (entero positivo), intentaron “identificar los reinos de número y magnitud” ([2, pág. 19]). El espacio estaba constituido por puntos, el tiempo estaba constituido por instantes. Puntos e instantes eran los átomos de Demócrito y a ellos les correspondían números. El espacio y el tiempo tenían también una cualidad conocida como “continuidad”. “Pese a que las magnitudes geométricas se pueden dividir indefinidamente, los átomos son las últimas partículas indivisibles” ([9, 1992, pág. 207]). De esta manera se deduce la continuidad de la recta, como determinada por la “contigüidad” de sus partes “que se unen según lo continuo”

En consecuencia, una línea era mirada como formada de un número integral de mónadas o unidades geométricas. Este punto de vista se contradujo con el descubrimiento de los inconmensurables: no era posible elegir una unidad pequeña, que permitiera medir la diagonal del cuadrado respecto a su lado. Así, la diagonal de un cuadrado no estaba constituida por una “progresión de multitudes”, i.e. por un entero. Esto contradecía uno de los elementos fundamentales de la doctrina pitagórica, que en boca de Filolao se expresaba:

“Todas las cosas que pudieran ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido” ([2, pág. 85])

consideraciones filosóficas como esta situaban la aritmética en un lugar de privilegio.

2.4 Los pitagóricos y el planteamiento del problema del continuo

El descubrimiento pitagórico de las razones inconmensurables planteó en su época el problema de la relación entre lo discreto y lo continuo. Los primeros en cuestionar el continuo numérico fueron los eleáticos, escuela fundada por Parménides que rivalizó con los pitagóricos.

“El principio fundamental de los eleáticos era el de la unidad y permanencia del Ser, punto de vista que contrastaba profundamente con las ideas pitagóricas de multiplicidad y cambio”. ([2, pág. 108]).

Zenón de Elea (450 a.C.) fue alumno de Parménides. Sus cuatro paradojas conocidas con los nombres de “la dicotomía”, “de la flecha”, de “Aquiles y la tortuga”, y la “del estadio” pretendían refutar las ideas de la divisibilidad infinita del tiempo y el espacio; negar la existencia de indivisibles o átomos matemáticos, como constituyentes del espacio y el tiempo.

“Tanto el argumento de la DICOTOMÍA como la de AQUILES sostienen que el movimiento es imposible bajo la hipótesis de la subdivisibilidad indefinida del espacio y el tiempo; los argumentos de la FLECHA y el ESTADIO tratan de demostrar en cambio que el movimiento es igualmente imposible si hacemos la hipótesis opuesta, es decir, la de que la subdivisibilidad del espacio y del tiempo termina en indivisibles” ([2, pág. 109]).

Lo que encontramos aquí es evidentemente el obstáculo epistemológico del infinito potencial, que impide concebir el proceso de subdivisión infinita para alcanzar el límite. Esto llevó a concebir la unidad como indivisible. Por tanto, el número sólo se puede obtener por una división finita pues todo proceso de división debe terminar en la unidad que es indivisible. Para superar estos “errores” es necesario admitir el infinito actual que admite la divisibilidad infinita.

Según [2, pág. 111], las paradojas de Zenón influyeron notablemente en el pensamiento matemático griego y junto con el impacto del conocimiento de los inconmensurables llevaron a restringir el dominio de los números a lo discreto y lo continuo se atribuyó a lo geométrico. Se cortó así la posibilidad de desarrollar el concepto de isomorfismo entre los puntos de la recta y los números reales, que más adelante constituirían el principio fundamental de la geometría analítica.

La ausencia de argumentos a favor de un continuo numérico obligó a los matemáticos de la época a aferrarse al continuo físico que era sugerido en la matemática por las magnitudes geométricas. Desde este último

punto de vista, la geometría en lugar de los números debería explicar el mundo.

El paradigma ontológico platónico que predominaba en la época condujo a precisar el objeto de estudio y el método de la ciencia matemática. Platón (427-347 a.C.) propuso que las *idealizaciones perfectas* de los objetos físicos constituían la auténtica realidad. Diferenció el mundo de las ideas (de los estados perfectos) del mundo físico (la realización imperfecta del mundo ideal).

“Por lo tanto, todo el mundo ideal merece estudio y sólo se puede obtener un conocimiento infalible en las puras cosas intangibles. Sobre el mundo físico sólo podemos tener opiniones y la ciencia física está condenada a verse hundida en el fango de las sensaciones ” ([9, 1992, pág 73-74])

Esta concepción llevaría a Platón a privilegiar el razonamiento deductivo de la matemática sobre el razonamiento inductivo de las ciencias experimentales.

“Platón fue el primero en sistematizar las reglas de la demostración rigurosa y se supone que sus seguidores ordenaron los teoremas en orden lógico” ([9, pág. 75]).

El razonamiento deductivo seguido por reglas lógicas preestablecidas y aceptadas era el más seguro para transitar en la filosofía. El aceptar unos axiomas y razones lógicas era garantía para obtener conclusiones “verdaderas”.

“Mientras que la inducción, la experimentación y las generalizaciones basadas en la experiencia sólo pueden dar un conocimiento de lo probable, la deducción conduce a resultados absolutamente seguros si las premisas son correctas” ([9, pág. 75]).

La consecuencia positiva que se obtuvo de esta precisión ontológica en la matemática de la época fue establecer el razonamiento deductivo como un modo válido para tratar los objetos matemáticos, sujeto a normas que filtran el conocimiento que se considera como aceptable. Por otro lado, esta posición implicó que las ciencias experimentales tuvieran poco apoyo para su desarrollo. Las observaciones eran interpretaciones de nuestros sentidos. Por tanto, el mundo material que observamos es una copia del mundo ideal inteligible, que es el verdadero, y sólo se puede conocer por medio del razonamiento lógico que nos libera de las falsas interpretaciones. Es decir, la verdad no está en la apariencia sensible sino en la idea de la cosa. Únicamente el mundo de las ideas es real.

La fuerza de la epistemología de Platón se demuestra en su supervivencia, con ciertos refinamientos y variaciones, hasta la época moderna. La encontramos en el idealismo trascendental de Kant según el cual “los fenómenos son simples representaciones” y también en el idealismo absoluto de Hegel: “la idea se realiza dialécticamente en el espíritu absoluto”.

En el contexto filosófico de Platón (existencia de un mundo independiente y eterno de las ideas, que constituía la realidad del universo del que formaban parte los conceptos matemáticos),

“la mónada pitagórica y el atomismo matemático de Demócrito, los cuales dieron a toda línea una densidad, quizás apelaban demasiado fuerte a la experiencia sensorial material para galantear a Platón por lo que él recurrió al altamente abstracto APEIRON o INFINITO INDETERMINADO. De acuerdo a Platón, el CONTINUUM podía mirarse mejor como el generado por el fluir del apeiron que se pensaba como una agregación siempre grande de indivisibles. Este punto de vista representaba una fusión de lo continuo y lo discreto no contrario al intuicionismo moderno de Brouwer.... Platón aparentemente no dio respuestas directas a las dificultades involucradas en la inconmensurabilidad o en las paradojas de Zenón, aunque si expresó su oposición al concepto de infinito de Pitágoras y la mónada como una unidad dotada de posición y también al atomismo de Demócrito”.([3, pág. 28]).

Para poder extender a los inconmensurables las demostraciones geométricas que se basaban en conmensurables, Eudoxo (408-355 a.C.) introdujo la idea de magnitud continua. No se trataba de un número, sino de entidades geométricas (longitud, área, volumen, etc.) las cuales eran continuas, contrariamente a los números que eran discretos.

“Eudoxo definía entonces una razón de magnitudes y a partir de ella una proporción, es decir una igualdad de dos razones que cubría los casos conmensurables e inconmensurables ” ([9, pág. 79]).

Las razones y proporciones no se representaban numéricamente sino que estaban ligadas a la geometría. Esta idea de Eudoxo resolvió el problema de los inconmensurables del mundo de los antiguos, pero

“forzó una nítida separación entre número y geometría, dado que únicamente la geometría podría manejar las razones inconmensurables” ([9, pág. 79]).

De esta manera se pasó de lado respecto al infinito o simplemente sobrevivió bajo la “sombra” de la intuición. Al mismo tiempo que, se cerró el

paso a los problemas que más tarde conducirían al concepto de número racional e irracional como tales. El sistema filosófico de Platón fue invertido por su discípulo Aristóteles (384-322 a.C), quien optó por una visión opuesta a la de su maestro, dando a la filosofía una perspectiva diferente: la idea existe pero no está en otro mundo, por el contrario se encuentra en el mundo presente a los sentidos, y es un dato que la filosofía debe explicar dando sentido a sus relaciones por medio de la observación, razonando y pensando. Se trata pues de una filosofía de la immanencia. Aristóteles fue un enciclopedista: escribió sobre mecánica, física, matemáticas, lógica, meteorología y muchos temas más. En lo que respecta a la matemática, su obra es importante por establecer

“los principios básicos de la matemática, distinguiendo entre los axiomas o nociones comunes, que son verdades comunes a todas las ciencias, y los postulados que son primeros principios aceptables para una ciencia concreta. Entre los axiomas incluye los principios lógicos, tales como la ley del tercio excluido” ([9, pág. 83-84]).

Los comentaristas de la obra de Aristóteles destacan su concepto de definición, que coincide con la idea moderna.

Aristóteles traslada el papel que Platón había establecido a las ideas como la realidad del universo, y del cual harían parte las matemáticas, a la materia. Era la substancia concreta la que constituía el mundo independiente y eterno. La matemática labora sobre las ideas;

“así, la matemática, trabaja con objetos abstractos que se derivan de propiedades de los cuerpos físicos” ([9, pág. 83])

La dupla Platón-Aristóteles dan origen a dos paradigmas de la epistemología que han logrado sobrevivir hasta el momento actual y muestra la dinámica interna que generan dos doctrinas opuestas en el dominio del pensamiento.

El continuo de Aristóteles. El continuo sólo está con las magnitudes geométricas, el número representa lo discreto. Para Aristóteles el continuo no puede ser concebido como una acumulación de puntos. Esto se expresa en sus discusiones sobre la concepción de la recta ideal y su relación con los puntos:

“Un punto, dice, es indivisible y tiene posición; pero entonces ninguna acumulación de puntos, por muchos que incluyera, podría darnos algo divisible, mientras que una recta es desde luego una magnitud divisible. Por lo tanto los puntos no pueden construir

nada continuo como una recta, pues un punto no puede ser continuo con otro punto. Un punto, añade, es como el ahora en el tiempo; el ahora es indivisible y no una parte del tiempo. Un punto puede ser el comienzo, un final o un divisor en un segmento pero no es parte de él ni de ninguna magnitud. Solamente por movimiento puede un punto generar una recta y ser así origen de la magnitud. También afirma que si un punto no tiene longitud, si una recta estuviera compuesta de puntos, tampoco tendría longitud, y análogamente si el tiempo estuviera constituido de instantes, no habría ningún intervalo de tiempo.” ([9, pág. 84]).

Estas ideas llevan a la conclusión que en su sistema los puntos y los números son magnitudes discretas que se deben distinguir de la magnitudes continuas que pertenecen a la geometría. No es posible concebir entonces un continuo numérico. La definición de Aristóteles de continuo es la siguiente:

“Una cosa es continuo cuando los límites en los que se tocan dos partes sucesivas cualesquiera son uno y el mismo y están, como la palabra misma continuo implica, juntos” ([9, pág. 84]).

Esta idea está ligada a la percepción, abstraída de los entes físicos; la continuidad es una propiedad que hace que extremos de dos cosas contiguas sean una misma cosa y se mantengan unidas.

El infinito en Aristóteles. Distingue dos clases de infinito: potencial y actual. El potencial evoca la posibilidad de superación, por ejemplo todo número entero positivo admite uno siguiente por lo que la lista de los números es ilimitada. El infinito actual es la consideración de la totalidad con todos sus elementos, por ejemplo el conjunto de los enteros. El infinito potencial se caracteriza porque las partes se consideran dadas o construidas sucesivamente, proceso que, por consiguiente, no puede ser completo. Por tanto el conjunto de partes como tal sólo existe en potencia. Si se consideran las partes como dadas simultáneamente se está aceptando un infinito actual. El infinito potencial está ligado al procedimiento, la acción y la dinámica.

Los atomistas admitieron un universo infinitamente grande, con formas infinitamente numerosas de mundos en él, es decir, un infinito actual. Aristóteles negó la existencia de un infinito actual, no aceptó lo infinitamente pequeño o infinitamente grande o infinitamente numeroso. Todos los infinitos según él, son solamente potenciales.

Refiriéndose a la doctrina del infinito en potencia, Aristóteles dice:

“No afecta a la teoría matemática, puesto que los matemáticos no necesitan del infinito ni hacen uso de él, sino tan solo de magnitudes tan grandes como se quiera, pero finitas; y la división que se realice sobre una magnitud muy grande puede aplicarse en igual razón a otra magnitud cualquiera, de manera que ello no supone diferencia alguna para la demostración.” (Physica,III,7,2076 27-34).

Concepciones como esta constituyeron lo que Cantor denominó el “horror al infinito” y que aquí expresa la eliminación del infinito actual y el rastro del obstáculo de la “inducción incompleta” que se manifiesta en los errores que se generan al derivar propiedades de unos pocos casos particulares. Se puede responsabilizar a tales obstáculos de la génesis tardía de conceptos matemáticos (límite, número real, convergencia, continuidad, etc.) que tiene su base precisamente en el concepto de infinito.

2.5 El continuo en los elementos

Queda establecido que los griegos no pensaron en un continuo numérico tal y como se define en nuestros tiempo, es decir, un conjunto compacto y conexo. Solamente Aristóteles define un continuo físico como se ha anotado, pero en los Elementos de Euclides se encuentran referencias implícitas a las ideas que deben configurar el concepto de conjunto continuo. Sin embargo,

“si se busca en Euclides el enunciado explícito de un principio de continuidad, no encontraremos nada” ([4, pág. 18])

Algunos comentaristas de Euclides afirman que éste había captado intuitivamente la continuidad pero no enunció el principio de continuidad de la recta, necesario para algunas demostraciones deficientes en las que, por ejemplo, se requiere la existencia de puntos de intersección entre dos líneas. Maurice Caveing argumenta contundentemente que el concepto de continuidad de la recta y la estructura del continuo están lejos de ser captados por la intuición, ya sea ésta empírica o racional.

“Euclides hace objeto al continuo de un tratamiento muy complejo que...exige... se formulen varios principios (orden denso de los puntos de la recta, orden total entre las magnitudes de la misma especie, existencia de la cuarta proporcional, axioma de la medida); lejos de venir dado de entrada en una intuición única y primitiva, dichos principios se manifiestan por el contrario, uno a uno, a través del análisis regresivo de los requisitos de diversos procedimientos operatorios” ([4, pág. 30]).

Esta conclusión se basa en planteamientos que reconstituyen los conceptos necesarios, desde el punto de vista moderno, para atribuir a los autores de los “Elementos” un conocimiento implícito o intuitivo del continuo, mostrando la imposibilidad de tal suposición.

Por ejemplo, siguiendo los razonamientos de Caveing, en el libro X y XII de los Elementos se descubren algunos enunciados no explícitos por Euclides y que parecen surgir de la mano por su necesidad operatoria. Tal es el caso en la demostración de la proposición $X, 1$

Proposición X,1. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que la mitad, repitiendo este proceso quedará en algún momento una magnitud menor que la más pequeña de las dos magnitudes dadas.

Euclides usa implícitamente las siguientes resultados:

1. Orden Total: Dadas dos magnitudes A, B de la misma especie se da una de las tres situaciones siguientes:

$$A > B, \quad A < B, \quad A = B$$

2. Propiedad Arquimediana: Dadas dos magnitudes A, B ($B < A$) de la misma especie, existe n en los naturales tal que $nB > A$.

En su argumentación se apoya en la definición $V, 4$

Definición V,4. Entre dos magnitudes A, B ($A > B$) existe una razón de la una a la otra si y sólo si existen enteros $m_i, n_i, i = 1, 2, 3, \dots$ tales que: $m_1A > n_1B > m_2A > n_2B > \dots$

y supone implícitamente 2, que ya había sido utilizada y establecida como lema por Eudoxo.

En el libro XII se supone la existencia de “la cuarta proporcional” sin ninguna demostración.

Cuarta Proporcional. Dadas las magnitudes A, B, C , (siendo A y B de la misma especie) existe una magnitud X (de igual especie que C) que es a C como B es a A .

“Es fácil darse cuenta de que la afirmación de existencia de esta magnitud en general constituye un sustituto débil del axioma de continuidad de Dedekind” ([4, pág. 25].

Pero, por supuesto, el contexto es bastante diferente. Se trata de un conocimiento implícito en los procedimientos: un saber hacer. Hace falta

una toma de conciencia que conduce al saber por qué se hace lo que se hace, y esto estaba fuera del alcance de los matemáticos de la época.

Para observar cómo la necesidad operatoria (procedimental) obliga a suponer lo anteriormente expuesto, comentaremos la demostración de la Proposición XII,2 que se apoya en la proposición XII,1.

Proposición XII, 1. La razón entre los polígonos semejantes inscritos en círculos es como la razón entre los cuadrados de los diámetros de ambos círculos.

Proposición XII, 2. La razón entre dos círculos es la misma que la que hay entre los cuadrados de sus diámetros.

Los pasos que sigue Euclides en la demostración son los siguientes:

1. Prueba que si $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ son polígonos regulares, inscritos en la circunferencia, de 4, 8, 16, $\dots, 2n, \dots$ lados; entonces se puede agotar el área del círculo, sustrayendo el área de los polígonos, siendo el área del polígono P_n más de la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono P_{n-1} .
2. Usa la proposición X,1 para afirmar que: la diferencia entre el área del círculo y la de un polígono regular con un número de lados, infinitamente grande, puede hacerse menor que cualquier magnitud fijada de antemano.

Si S y S' son las áreas de los círculos y d, d' sus diámetros. Euclides desea probar que:

$$S : S' = d^2 : d'^2$$

Supongamos que no se cumple la igualdad y en su lugar se tiene:

$$S : S'' = d^2 : d'^2 \quad (1)$$

donde S'' es un área mayor o menor que S' . (Se asume la existencia de la cuarta proporcional). Si $S'' < S'$. De lo probado en 1 y 2 y la proposición X,1 se sigue que, existe un polígono P' tal que:

$$P' < S' - S''$$

por tanto

$$S'' < P' < S' \quad (2)$$

Si inscribimos en S un polígono P , semejante a P' , por la proposición XII,1

$$P : P' = d^2 : d'^2 \quad (3)$$

y por (1) y (3), $S : S'' = P : P'$ o equivalentemente

$$P : S = P' : S''$$

Pero $P < S$. Luego $P' < S''$ lo que contradice a (2). De forma similar se puede probar que S'' no puede ser mayor que S' . Luego $S'' = S$ y teniendo en cuenta (1) queda demostrada la proposición.

Como se puede observar, en esta demostración se impone la necesidad de aceptar el orden total entre magnitudes, la existencia de la cuarta proporcional y el infinito actual, que son ideas que configuran la estructura del continuo geométrico. Estas nociones no son explícitas pero de alguna manera han surgido de la necesidad para precisar los conceptos, en especial para eludir el problema planteado por los inconmensurables.

“Pero no es necesario un axioma de continuidad del tipo de Dedekind. Basta con el axioma de Arquímedes, y el orden denso de los puntos racionales. En otras palabras, la continuidad no es accesible; pero sólo se alcanza a través de la divisibilidad indefinida, es decir potencialmente” ([4, pág. 29]).

Si consideramos las siguientes definiciones:

Definición V,1. Una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.

Definición V,5. Se dice que dos magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, si cuando tomamos cualquier equimúltiplos de la primera y la tercera y cualquier equimúltiplos de la segunda y la cuarta, los primeros equimúltiplos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente.

Se puede observar que estas definiciones permitieron a los griegos eludir el obstáculo numérico de los inconmensurables y la proposición X,1 constituyó el principio sobre el cual está basado el método de exhaustión de Eudoxo. El método permitió calcular el área del círculo, el volumen de la pirámide, el cono, el cilindro y la esfera, gracias a que

“excluye los infinitesimales de todas las demostraciones en la geometría de los griegos” ([3, pág. 33])

De esta manera se pasa por un lado de los problemas de la divisibilidad infinita, del continuo y su relación con los infinitesimales. Esto es claro puesto que a pesar que el proceso indicado en X,1 se realiza tantas veces como se desee:

“Los matemáticos Griegos nunca consideraron literalmente este proceso como la ejecución de un número infinito de pasos, tal y como nosotros lo hacemos en el paso al límite” ([2, pág. 34]).

“El método de exhausción, aunque equivalente en muchos aspectos a el tipo de argumento ahora empleado en la prueba de existencia de un límite en el cálculo diferencial o integral, no presenta el punto de vista involucrado en el paso al límite” ([2, pág. 85]).

Así, por ejemplo, la sucesión $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ de las áreas de los polígonos inscritos en el círculo en $X, 1$, tendría un límite C si para todo $\epsilon > 0$ existe N natural tal que si $n > N$ entonces

$$|P_n - C| < \epsilon$$

Este número C sólo cumple la propiedad establecida en términos analíticos por la definición, la cual emplea lógica formal, el concepto de número real y el de orden. En tanto que, en el contexto del método de exhausción el razonamiento está guiado por intuición espacial, la subdivisión ilimitada y la argumentación por reducción al absurdo.

Esta concepción que teme al infinito impide ver un proceso de aproximación como una operación que llega a un resultado (como es el caso del límite). Es decir, la *encapsulación* del proceso *en una definición* que capta sus elementos invariantes y esenciales, eliminando así el problema del infinito. Por tanto es necesario recurrir a otra manera de justificar el procedimiento. En este caso se recurre a un razonamiento *mirando el resultado* y luego pasar a una demostración. No poseer la operación de paso al límite restringe la obtención de nuevos resultados, aquellos que no se dejan captar por una visualización geométrica o no se pueden intuir físicamente. Esta observación, señala la manifestación del rechazo que opone el obstáculo “horror al infinito” a una nueva concepción que es aquella que admite el “estatus de operación del límite”.

2.6 El continuo de Arquímedes

Quien más se acercó entre los antiguos al proceso de paso al límite fue Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.),

“Él, más que ningún otro autor griego acercó la geometría a la mecánica y utilizó con gran ingenio argumentos geométricos para dar demostraciones”. ([9, pág. 233]).

Gracias a que imaginó las figuras geométricas como constituidas por segmentos de líneas o láminas delgadas pudo desarrollar un método heurístico dirigido por consideraciones físicas que facilitaban el descubrimiento de proposiciones matemáticas. El nuevo conocimiento, obtenido mediante un razonamiento inductivo, posteriormente era demostrado rigurosamente por medio del método de exhaustión.

“El método deductivo de exhaustión no era una herramienta que se adaptara bien para el descubrimiento de nuevos resultados pero Arquímedes lo combinó con consideraciones infinitesimales” ([2, pág. 48]).

En el tratado de Arquímedes conocido como *El Método* se expone el uso de ideas procedentes de la mecánica para obtener teoremas matemáticos correctos. En este libro se calcula el área del segmento parabólico, empleando la ley de las palancas y la idea de superficie hecha de segmentos de rectas.

“Arquímedes empleó su método heurístico, simplemente como una investigación preliminar a la demostración rigurosa por el método de exhaustión”([2, pág. 51]).

En el tratado *La cuadratura de la parábola* se demuestra con todo el rigor el problema del cálculo del área del segmento parabólico. El procedimiento empleado es el del método de exhaustión sin hacer referencia al infinito ni a los infinitesimales.

Es importante destacar el comentario de Carl Boyer respecto a la prueba del área del segmento parabólico :

“...él entonces demostró que el área de n de tales polígonos estaba dada por la suma (en la notación actual):

$$A\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4n-1}\right)$$

donde A es el área del triángulo inscrito que tiene la misma base y vértices que el segmento (de la parábola). La suma infinita de la serie es $\frac{4}{3}A$, y esto fue probablemente lo que permitió a Arquímedes inferir que el área del segmento parabólico era también $\frac{4}{3}A$. Sin embargo él no estableció el argumento de esta manera, en lugar de encontrar el límite de la suma infinita, él encontró la suma de los n primeros términos y adicionó el residuo, usando la igualdad

$$A\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{4}{3}A$$

Cuando el número de términos es grande, la serie “agota” $\frac{4}{3}A$ sólo en el sentido griego que el residuo $\frac{1}{3} \frac{1}{4^n - 1}$ puede ser tan pequeño como se desee. Esto es, por supuesto, exactamente el método de prueba para la existencia de un límite; pero Arquímedes no interpretó así el argumento. El no expresó la idea de la no existencia de residuo en el límite o que la serie infinita es rigurosamente igual a $\frac{4}{3}A$. En lugar de esto, él probó, por una doble reducción al absurdo (el método de exhausción), que el área del segmento parabólico, no puede ser ni mayor, ni menor que $\frac{4}{3}A$. ([2, pág. 52]).

Nuevamente, está presente aunque en otro contexto el obstáculo de “horror al infinito” que rechaza la admisión del proceso de paso al límite como una operación matemática. Parece sorprendente que en este contexto numérico no haya prosperado la noción de operación matemática ligada a la situación para obtener un resultado. Mucho más, si tomamos en cuenta que aquí se realizan aproximaciones sucesivas, guiadas por la heurística, aparentemente cercanas a la operación con límites, en el sentido de que permiten descubrir el resultado (y no como ocurre en el método de exhausción en donde, el resultado, se conoce previamente)

El concepto de función. La geometría griega no se ocupó de la variación y por el contrario sólo estudió figuras estáticas. En consecuencia, los griegos no se aproximaron al concepto de función. Sin embargo, en el caso de Arquímedes se presenta una situación atípica en la geometría griega. Por ejemplo sorprende su definición de la espiral:

“el lugar geométrico de un punto en el plano que, partiendo del extremo de una semirrecta se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira uniformemente alrededor de su extremo” ([2, pág. 172]).

Las ecuaciones paramétricas del movimiento son:

$$r = k t \quad q = w t$$

Eliminando el parámetro t obtenemos la ecuación polar $r = a q$. Con la descomposición del movimiento,

“Arquímedes parece haber hallado la dirección instantánea del movimiento resultante de los dos componentes por medio del paralelogramo de las velocidades, esta parece ser la primera vez que se determinó la tangente a una curva que no fuera una circunferencia”. ([2, pág. 173]).

Arquímedes dedujo y demostró que “el área limitada por la primera vuelta de la espiral y la línea inicial, es igual a un tercio del primer círculo” ([9, pág. 160]). El procedimiento es básicamente el mismo descrito anteriormente, la novedad está en que ahora considera sectores circulares inscritos y circunscritos, acotando el área A por sumas superiores (\overline{S}) e inferiores (\underline{S}) de manera que la diferencia $|\overline{S} - \underline{S}|$ sea tan pequeña como se desee.

“Esta manera no es la misma que “agotando” el área añadiendo cada vez más figuras lineales. Sin embargo en la última parte de la demostración Arquímedes utiliza el método indirecto de demostración igual a como lo hizo en la prueba del área del segmento parabólico y como lo hace Euclides en sus demostraciones por aproximaciones sucesivas. No hay ningún límite explícito en el proceso” ([9, pág. 161-162])

Pero, la forma de acotar el área es exactamente la misma con la que hoy se demuestra la existencia del límite.

3 Aplicación del modelo al estudio de la formación y evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos

De acuerdo al modelo de Toulmin, primero se deben identificar los elementos constitutivos de las tres representaciones del modelo.

A) Representación transversal

Esta representación permite identificar los conceptos que serán motivo de análisis en las siguientes representaciones. El período estudiado se caracteriza por ser la génesis del problema del continuo matemático y el establecimiento de la misma matemática como una disciplina intelectual independiente. Estos hechos dificultan la definición de la “totalidad de los conceptos de la disciplina que existen en un tiempo t determinado”. A costa de omitir algunas ideas que contribuyeron en la definición del objeto y método de las matemáticas, se opta por concentrar nuestra atención en los conceptos que en su evolución constituirían el desarrollo de la disciplina y en particular en aquellos relacionados con el concepto del continuo matemático. La representación de los conceptos matemáticos en tiempos de Pitágoras (t_p), de los Elementos de Euclides (t_e) y en los tiempos de Arquímedes (t_a) es la siguiente:

B) Representación longitudinal

En el período de estudio, la evolución genealógica del concepto de continuidad y conceptos relacionados se ilustra en la Figura N° 3, a la cual corresponden las siguientes caracterizaciones:

- Cp:** Continuo pitagórico. Es cierta “cualidad” inherente a espacio y tiempo, que relaciona el todo con sus “últimos” elementos constitutivos (átomos). Los átomos que forman una pluralidad tenían por una parte características de la unidad geométrica, el punto, y por otra las características de la unidad numérica. Lo continuo era geométrico y numérico.
- Ce:** Continuo en los Elementos. El continuo sólo está en las magnitudes geométricas. El número representa lo discreto.
- Ca:** Continuo arquimediano. Es sugerido por los sentidos, ligado a la mecánica y generado por el movimiento. El continuo geométrico es obtenido por la agregación de infinitos indivisibles geométricos.
- DL:** Dominio logístico pitagórico. Se ocupa de la aplicación de la aritmética a problemas comerciales o técnicos.
- Dp:** Dominio aritmético pitagórico. Se ocupa de la esencia y propiedades de los números y el espacio.
- DG:** Dominio geométrico euclidiano. Se ocupa de la forma y relaciones del espacio percibido por los sentidos (espacio usual).
- DA:** Dominio aritmético euclidiano. Se ocupa de la esencia y propiedades de los números.
- Np:** Número pitagórico. Es el conjunto de los enteros positivos. Los racionales positivos están implícitos en la definición de razón.
- Ne:** Número euclidiano. Es el conjunto de los enteros positivos. Los racionales positivos y los irracionales están implícitos en las definiciones de razón y proporción respectivamente.
- R:** Razón. Es una relación entre dos magnitudes del mismo tipo con respecto a su tamaño.
- Mp:** Magnitud pitagórica. Es algo que se puede “medir”. Sólo cubre entidades (longitud, área, volumen) en el caso que sean conmensurables.

P: Proporción. Definición V,5 de los Elementos.

Me: Magnitud euclidiana. Extiende el dominio de M_p a las cantidades inconmensurables.

Ip: Infinito pitagórico. Es actual.

Ie: Infinito euclidiano. Es potencial.

ip: Indivisibles pitagóricos. Son los elementos “últimos” que constituyen la pluralidad, átomos o partículas físicas indivisibles.

ia: Indivisible arquimediano. Las superficies están formadas por infinitos segmentos lineales, los sólidos por infinitas láminas delgadas, segmentos y láminas son los indivisibles. El concepto es más físico que geométrico.

C) Representación evolutiva

Consideramos conjuntamente las variables A y B, como se muestra en la Figura N° 4, para poder analizar la evolución conceptual y obtener los resultados del análisis.

Resultados del estudio epistemológico del continuo en el período griego

Expresaremos ahora algunos resultados de los desarrollos del continuo por los griegos, respondiendo las preguntas referentes a:

- A) La innovación o variación conceptual.
- B) Los procedimientos de selección.
- C) La relación entre cambio conceptual y unidad de la disciplina.

Las respuestas resultan de la consideración de los resultados observados en el estudio de la dimensión evolutiva :

A) La innovación o variación conceptual

Durante el período griego se introdujo el problema (P_1) del continuo que se plantea al buscar respuesta a la pregunta

P_1 : ¿Cuál es la relación entre lo discreto y lo continuo.?

La pregunta surge del planteamiento de las paradojas de Zenón que cuestionaron la concepción pitagórica del continuo (**Cp**)

Cp: Continuo pitagórico. Es cierta “cualidad” inherente a espacio y tiempo, que relaciona el todo con sus “últimos” elementos constitutivos (átomos). Los átomos que forman una pluralidad tenían por una parte características de la unidad geométrica, el punto, y por otra las características de la unidad numérica. Lo continuo era geométrico y numérico. Los pitagóricos entonces concebían la recta formada por partículas (átomos) y la continuidad estaba dada por contacto entre ellas.

Esta idea es cuestionada y se produce una primera variación conceptual que notaremos (V_1) hacia un continuo (**Ce**) concebido por la escuela aristotélica y que aparece implícito en los Elementos:

Ce: Continuo en los Elementos. El continuo sólo está en las magnitudes geométricas y la noción es sugerida por representaciones externas; en los elementos no se encuentra un enunciado explícito del continuo, tan sólo se menciona (postulado 2 de los Elementos), pero aparece implícitamente en algunas demostraciones que involucran la intersección de líneas y en la existencia de la cuarta proporcional. Respecto a la solución del problema P_1 , se designa al número (enteros positivos, y cocientes entre enteros) para representar lo discreto y la geometría lo continuo.

Posteriormente, en tiempos de Arquímedes surge una segunda variación (V_2), jalonada por razones eminentemente prácticas, que define el continuo arquimediano:

Ca: Continuo arquimediano. Es sugerido por los sentidos, ligado a la mecánica y generado por el movimiento. El continuo geométrico es obtenido por la agregación de infinitos indivisibles geométricos.

Esta noción se operativiza permitiendo descubrir límites, pero no se define como una operación de paso al límite que, de esta manera, se relega a una cierta heurística no explícita sino tan sólo inferida por los comentaristas de la obra de Arquímedes.

Respecto a la solución al problema P_1 , aparece una clara, aunque implícita, relación entre continuo y paso al límite. Tal relación implícita e inferible de los procedimientos permanece bajo la tutela restrictiva del

infinito potencial. El objeto ideal geométrico se ve como un objeto concreto sobre el que se opera para obtener un resultado. La continuidad de grandezas aparece implícita en los razonamientos.

Consideramos las dos variaciones:

V_1 : variación del continuo pitagórico (**Cp**) al continuo euclidiano (**Ce**).

V_2 : variación que da forma al continuo arquimediano (**Ca**) como un híbrido de **Cp** y **Ca**.

V_1 : Los pitagóricos audazmente entrevieron un isomorfismo entre los puntos de la recta (recordemos que la recta son segmentos que se extiende según lo continuo) y los números. Si la recta era formada por agregados y continua (por contacto), entonces los números formaban un continuo numérico (Cp). Esta posición no satisface los ideales explicativos del momento. Se encuentra más razonable admitir lo continuo en lo geométrico que viene sugerido por el movimiento. Se separa lo aritmético, que corresponde a lo discreto, de lo geométrico, que da cuenta de lo continuo.

A.1 Los factores causales de la variación.

La variación V_1 surge como resultado:

- Del enfrentamiento de dos teorías filosóficas rivales (pitagóricos y eleáticos). Surgen paradojas que Cp no puede explicar. En este caso las exigencias de los ideales explicativos superan los conocimientos, del número y sus propiedades, de la época.
- Del predominio de la noción de infinito potencial que impide ver el infinito actual. Este obstáculo se manifiesta en los razonamientos respecto a las paradojas de Zenón (la divisibilidad potencialmente infinita sin alcanzar el límite)
- De la ausencia de un concepto de número más amplio y la imposibilidad de constituirlo dados los instrumentos teóricos del momento.
- De la imposición a los sentidos del continuo físico y lo abstracto del continuo numérico. El continuo físico se constituye en obstáculo para avanzar en la construcción de un continuo matemático, por lo contrario reafirma el continuo geométrico como sugerido por el movimiento.

Los factores causales de la variación V_2

El híbrido es el resultado de:

- Una imaginación sutil (indivisible geométrico de arquímedes).
- El acercamiento de dos disciplinas (física y geometría).
- Los resultados positivos en la matemática del método heurístico de Arquímedes al relacionar áreas, indivisibles y mecánica.

A.2 Respecto al rigor y lentitud del cambio de estatuto de las nociones:

Este aspecto lo interpretamos a la luz de las definiciones introducidas por Chevallard (1985) respecto al estatuto que adquiere una noción en su proceso de institucionalización (ver pie de página No 1). Una noción tiene un estatuto protomatemático si ella interviene en los razonamientos y procesos matemáticos de forma implícita, se consideran obvias. Posteriormente una noción puede adquirir un estatuto paramatemático, es decir se considera una herramienta útil y se hace uso de ella, se tiene conciencia de ella y se le asigna un nombre pero no es objeto de estudio para el matemático. Finalmente, la noción puede ingresar al dominio de la matemática y se constituye en objeto de estudio para el matemático. Se nombra y define. En tal caso su estatuto es matemático. Así, Chevallard señala una dirección del proceso de institucionalización de un concepto:

protomatemático \rightarrow paramatemático \rightarrow matemático

que ocurre tanto en la filogénesis del concepto, en el seno de una comunidad científica, como en la ontogénesis, en el marco de un sistema didáctico.

Observamos que en tres siglos que son los que comprende el período estudiado no se logró avanzar en la constitución del continuo numérico. Esto se explica en términos de la lentitud que imponen los obstáculos epistemológicos en el sentido de Bachellard (1938).

La prisión psíquica, creada por la obligación de apelar a la intuición geométrica, impidió a los griegos liberar la abstracción matemática de un fuerte condicionamiento de las percepciones físicas. Por ello encontramos en el infinito potencial un obstáculo epistemológico cuya manifestación causa serias perturbaciones que actualmente se conocen con el nombre de “horror al infinito”. El infinito potencial de Aristóteles niega la posibilidad de un infinito actual, en “acto”, y repercute durante siglos llevando al manejo poco riguroso de conceptos y definiciones por la ausencia de una elaboración teórica del infinito actual. Su sustituto paso a ser la “intuición” que lleva a aceptar como válido aquello que se comprueba para “pocos” casos y,

luego, por una inducción incompleta se extiende de manera abusiva a “todos”. Esto no desconoce que la “intuición” no ha jugado un papel importante, sólo señala que depender de ella como criterio de validación ha llevado a inconsistencias y retardos en el avance de la disciplina.

El “horror al infinito” es responsable de la resistencia al cambio de la concepción C_e , pero además se pone en evidencia que ni el continuo geométrico sugerido por la visión corpuscular de la recta, ni el numérico son de ningún modo intuitivos (entendiendo, intuición como evidencia inmediata producida por un dato sensorial o por el razonamiento).

A.3 La selección de los cambios.

Nos interesa señalar ahora los factores que son responsables de que los cambios se dieran en cierta dirección y no en otra. En V_1 la variación se produjo preferentemente en la dirección de C_e por los siguientes factores:

- El sentido práctico. La geometría griega es más cercana al mundo de lo concreto. Por tanto, el desarrollo de C_e permitía resolver los problemas prácticos que a ellos les interesaban.
- Los obstáculos epistemológicos. El continuo no es intuitivo. El número sólo es posible por abstracción, por tanto, su desarrollo conceptual es más lento debido a los obstáculos que se deben superar: horror al infinito, obstáculo de la concepción física del continuo (corpuscular y dinámica).
- Desarrollos desiguales entre geometría y aritmética.
- El paradigma filosófico de la época.

B) Procedimientos de selección

Respecto a los procedimientos de selección de la época, por medio de los cuales se aceptan o rechazan ciertas variantes conceptuales.

B.1 Respecto a los factores que determinaron el ingreso de la variante conceptual.

En el caso V_1

(a) Factores externos:

- El paradigma eleático del Universo exigía un continuo sin indivisibles.

- Las exigencias de la economía y la organización social de los griegos, se satisfacían con los desarrollos explicativos de la geometría de los Elementos. No era imperativo un continuo numérico.
- El desarrollo incipiente de la mecánica, más cualitativo que cuantitativo, no exigía un concepto numérico más completo. Los matemáticos no enfrentaron una exigencia intelectual para emprender la tarea.

(b) Factores internos:

- La ausencia de sistemas simbólicos más desarrollados que permitieran abstraer de los procedimientos operatorios las ideas implícitas, que conducirían a la construcción de un continuo numérico.
- El temor al infinito.
- La solución que brindó el trabajo de Eudoxo al obviar los problemas planteados por los inconmensurables, el infinito y los indivisibles.
- La prisión psíquica, creada por la apelación a la intuición sensorial, que impedía a los griegos liberar la conceptualización de un fuerte condicionamiento de los sentidos.

En el caso de V_2

(a) Factores externos:

- El desarrollo de la física arquimediana permitió establecer una relación entre mecánica y geometría, que parecía ser prometedora.

(b) Factores internos:

- Los conceptos físicos eran aplicables a los “objetos” matemáticos.
- La relación del continuo geométrico compuesto por indivisibles y la mecánica produjo un método heurístico de gran poder en el descubrimiento de nuevas relaciones matemáticas.

B.2 Respecto a las consideraciones en que reposa la selección de la variante.

La selección ha obedecido a “buenas razones” generadas por el debate entre las escuelas pitagóricas y eleática, debido a que la matemática

no está constituida (en la época) propiamente como una disciplina independiente. El debate se plantea desde la perspectiva filosófica.

B.3 Respecto a los criterios de selección.

Por la razón que ya hemos expuesto del desarrollo incipiente de la matemática como disciplina, es claro que tales criterios que permiten distinguir los cambios conceptuales “válidos” de los “erróneos”, son deficientes y tan sólo encontramos evidencia de rigor en el texto de los Elementos de Euclides, el cual define los estándares de rigor de la época

C) Relación cambio conceptual unidad de la ciencia

El cambio conceptual, en el período estudiado da origen a tres ramas de la matemática: lógica, aritmética y geometría. La unidad de la matemática no se ve amenazada, cada rama identifica sus metas y problemas propios, así como el núcleo que les es común.

Conclusiones

Del estudio histórico se desprende que:

- Se niega temporalmente la posibilidad de la existencia de un continuo numérico. El desarrollo posterior de este concepto muestra que concepciones incompletas pueden ser estables por largos períodos de tiempo, a menos que surjan nuevos problemas de los cuales se deriven las teorías necesarias para desestabilizar un concepto incompleto o errado.
- El tipo PdS_2 de la variación V_2 reafirma la última parte de la conclusión anterior. Indica que la negación de los indivisibles por una parte y, por otra, los resultados obtenidos de su utilización para derivar resultados matemáticos válidos permiten concluir que es plausible admitir un continuo geométrico formado por indivisibles.
- La densidad y el orden denso de magnitudes racionales e irracionales no lograron ser comprendidas completamente por los griegos.
- No es suficiente poseer una idea de divisibilidad potencialmente infinita para acceder al concepto de límite.
- El método de los infinitesimales de Arquímedes es la forma procedimental de la operación matemática de paso al límite. Como

instrumento para calcular demostró ser útil y por ello fue aceptado en la comunidad matemática. La perspectiva del desarrollo de este concepto muestra que la toma de conciencia, el paso de lo procedimental a lo conceptual, fue un largo proceso resultado de la actividad de la comunidad matemática y de su reflexión sobre la actividad misma.

- La polémica surgida de la propuesta pitagórica del continuo planteó un problema: ¿cuál es la relación entre lo discreto y lo continuo?

Estos hechos revelan la existencia de un conjunto de obstáculos epistemológicos cuya interrelación y predominio explica la exclusión de las nociones fundamentales del cálculo en la época griega y su lentitud para alcanzar su institucionalización en las matemáticas de las épocas subsiguientes. La investigación permite señalar los siguientes obstáculos presentes en la época analizada:

Obstáculos epistemológicos

1. El paradigma filosófico de las matemáticas. Para los griegos las matemáticas no son una creación, ellas preexisten en la naturaleza. El hombre se limita a descubrirlas y a describirlas. Las ideas aceptadas eran aquellas que se alcanzaban por interpretación estrictamente lógica, pero los postulados en que se fundamentan estas deducciones no eran arbitrarios y estaban sugeridos por concepciones establecidas por la experiencia empírica.

Esta concepción cierra el paso a la especulación y admite sólo aquello que es comprobable por la experiencia. Sin embargo, ella favorece la instauración en la cultura griega del valioso método deductivo con el que se alcanza la perfección del sistema axiomático de la geometría de Euclides. Pero a causa de la misma concepción ésta se limita a la recta, la circunferencia y las figuras relacionadas con ellas; constituyendo así el conjunto de las curvas “verdaderas”. El rigor exigía que se demostrara la existencia de la figura, es decir, se admiten sólo aquellas que se obtenían por regla y compás excluyendo las demás. Por ejemplo, la parábola se consideró como una sección cónica estudiando sus propiedades cualitativas sin ocuparse de las propiedades matemáticas. Las limitaciones, consecuencia del obstáculo epistemológico, no se circunscribieron a esta visión restringida de la geometría sino que provocó lo que Cantor denominó el “horror al infinito”

2. El “horror al infinito”. Los griegos eludieron el infinito actual, admitiendo sólo el infinito potencial.

Este obstáculo está relacionado con (1) porque para concebir el infinito actual era necesario alejarse de lo sensible y entonces acudir a la especulación, actividad intelectual que filosóficamente era rechazada. La señal de la presencia de este obstáculo es el rechazo en la matemática griega de lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande y los procesos infinitos. Por ejemplo, el concepto de lo infinitamente pequeño está implícito en la relación existente entre los puntos de una línea. Para eludirlo, Aristóteles separó los dos conceptos, puntos y recta, admitiendo que los puntos (lo discreto) estaban en la recta. Pero, negó que ella (lo continuo) pudiera estar conformada por puntos pues lo continuo no se puede construir a partir de lo discreto.

Esta incomprensión de la relación entre lo discreto y lo continuo, a causa de la exclusión de lo infinitamente pequeño, también condujo a la omisión del paso al límite. Entonces se recurre al método de exhaustión que exige que la diferencia entre las magnitudes que se aproximan y su magnitud límite sea estrictamente positiva para que intuitivamente sea aceptable la aproximación.

3. El obstáculo geométrico. Las concepciones que hemos enumerado contribuyeron a afirmar el predominio de la geometría como el modelo perfecto de razonamiento y validación de los objetos matemáticos aceptables.

Esta concepción y la incapacidad para admitir el número irracional condujeron a separar la aritmética de la geometría impidiendo el desarrollo del álgebra y lo complicado de las demostraciones geométricas constituyó un obstáculo para el desarrollo del cálculo. Como consecuencia de la presencia de estos obstáculos el pensamiento griego presenta las siguientes limitaciones:

- Se niega, temporalmente, la posibilidad de la existencia de un continuo numérico. Esta es una concepción errónea. El desarrollo posterior de este concepto muestra que estas concepciones pueden ser estables por largos períodos de tiempo, a menos que surjan nuevos problemas de los cuales se deriven las teorías necesarias para desestabilizarlo. Se afirma que lo continuo sólo puede referirse a los objetos geométricos. Esta es una concepción pertinente e inadaptada

- La variación V_2 , que plantea una solución en la que se relacionan conceptos de la física con conceptos geométricos para resolver un problema práctico, reafirma la última parte de la conclusión anterior. Indicando que la negación de los indivisibles por una parte y por otra los resultados obtenidos de su utilización para derivar resultados matemáticos válidos, lleva a una posición contradictoria que no ve plausible admitir un continuo geométrico formado por indivisibles y los procesos que conducirían a la noción de límite.

La presencia de estas limitaciones en el pensamiento griego nos enseña que:

- La idea del continuo en matemáticas es altamente abstracta y no es intuitiva. No es suficiente poseer una idea de divisibilidad potencialmente infinita, para acceder al concepto de límite. El método de los infinitesimales de Arquímedes es la forma operatoria de la noción matemática de paso al límite. Como instrumento para calcular demostró ser útil y por ello fue aceptado en la comunidad matemática. La toma de conciencia, el paso de lo operativo a lo conceptual, fue un largo proceso resultado de la actividad de la comunidad matemática y de su reflexión sobre la actividad misma. El concepto de función está implícito en los cálculos astronómicos de los griegos antiguos, en tablas y gráficas, pero el concepto como tal no es abordado como objeto de estudio por los griegos. Al respecto Boyer comenta:

“Nosotros hemos visto que la geometría griega trató en su mayor parte con la forma más que con la variación, así que el concepto de función no fue desarrollado.” ([2, pág. 56])

- El concepto de continuidad está implícito en los razonamientos griegos respecto al movimiento, que era entendido en un sentido amplio de “cambio” que incluía las grandezas geométricas. También se encuentra implícito en el manejo de las proporciones, pero referida siempre al modelo geométrico, como lo confirma Youschkevitch (1976) cuando explica la influencia del pensamiento aristotélico en las ideas de los matemáticos de la edad media. Él comenta que Oresme dirá a mediados del siglo XIV que toda cosa medible, excepto los números (que Oresme concebía a la imagen de los griegos), se debe imaginar como una cantidad continua.

“Esto porque los puntos, líneas y superficies en los cuales, según Aristóteles, la medida o razón (mensura seu proportio) es hallada inicialmente, son necesarios para medir estas “cosas”; en todas las otras cosas, la medida o razón es estudiada por la relación mental con los puntos, líneas y superficies.”([11, pág. 18])

Así, la continuidad geométrica se traslada a toda cosa medible.

- La polémica surgida de la propuesta pitagórica del continuo planteó un problema cuya solución se obtendría 2.000 años después (Dedekind, Cantor). Los obstáculos conceptuales que se superaron en esta larga trayectoria han enriquecido la matemática.

Referencias

- [1] Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Librairie Philosophique. París. Traducción al castellano: La formación del espíritu científico. Siglo XXI. México, 1990.
- [2] Boyer, C. *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza editorial, (1987).
- [3] Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and his Conceptual Development*. Dover Publications. New York.
- [4] Caveing, M. Descles, J., Dieudonné. *et al* (1988). *Pensar la Matemática*. Baralona: Tusquets Editores.
- [5] Chevallard, Y. (1985) *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage. Grenoble. Traducción al Castellano: La transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique. Argentina. (Edición consultada 1991)
- [6] Estany, A; Izquierdo, M. La evolución del concepto de afinidad analizada desde el modelo de Toulmin. *Llull*, Vol. 13, pág. 349-378. Barcelona. 1990
- [7] Farfán, M. R. *Ingeniería didáctica, un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica. México (1997)
- [8] Heath, T.L. *A Hystory of Greek Mathematics*. Vol. I. Oxford University Press. (1921)
- [9] Kline, M. (1972.) *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días*. Madrid: Alianza Editorial.
- [10] Toulmin, S. (1977) *La Comprensión Humana, el Uso Colectivo y la Evolución de los Conceptos*. Madrid: Alianza Editorial.

- [11] Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for history of exact sciences*, 16, 36-85. Traducción al Francés: Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle. trad. Bellemin, J., *Fragments d'histoire des Mathematiques*. Broucheure APMEP, 41, pp. 7-68.

Dirección del autor: César Augusto Delgado G Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

La revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* es un órgano de expresión del profesorado y de todos los interesados en el desarrollo matemático universitario. Haga conocer sus trabajos y sus puntos de vista enviando a la revista

- artículos
- notas de clase
- glosas sobre libros y artículos
- problemas y soluciones
- noticias, etc.

Envíelos a través de los corresponsales de *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* o directamente a la siguiente dirección

Matemáticas: Enseñanza Universitaria
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Valle
Apartado Aéreo 25360,
Cali, Colombia.
Teléfonos: (2) 330-25-66 339-32-27
e-mail: revistaerm@univalle.edu.co
página web: <http://revistaerm.univalle.edu.co>



RESÚMENES DE ARTÍCULOS, PROYECTOS Y TESIS

La revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* aspira a dar una visión de la investigación que se realiza en Colombia o por colombianos residentes en el exterior, en las áreas de las matemáticas, su historia y sus problemas educativos. Con este fin se publicarán en esta sección resúmenes de artículos investigativos en estas áreas, recientemente publicados o próximos a publicarse, al igual que resúmenes de proyectos de investigación en marcha y de tesis de grado escritas en los posgrados existentes en el país, que sean presentados a la Revista. Utilizaremos la clasificación de los abstracts de la American Mathematical Society (AMS). En el número de clasificación de cada resumen, el primer grupo de dígitos indica el año, el segundo el número del tema según la clasificación de la AMS y el último el número de recepción del resumen en la sección correspondiente. Las letras A, P o T al final se refieren a artículo, proyecto o tesis. La expresión *Copias disponibles*, al final de un resumen, indica que usted puede conseguir copias del artículo o proyecto escribiéndole al autor.

13. ANILLOS Y ÁLGEBRAS CONMUTATIVOS

01-13-3 T

Título: Acerca de ideales primitivos de algunas clases especiales de anillos

Autor: Iván Darío Núñez Orozco

Director: Margarita María Toro V.

Institución: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Fecha de aprobación: 2001

Resumen: Introducimos los conceptos de ideal primo e ideal primitivo, caracterizándolos de diversas maneras y estableciendo relaciones entre ellos. Se utilizan técnicas topológicas y algebraicas similares a las que se usan en anillos conmutativos. Se estudia la construcción de los anillos extensión de Ore. Además, si K es un campo y A es una K -álgebra que es también una clase particular de extensión de Ore, se presenta la prueba de la equivalencia, sobre ideales primos, de las condiciones siguientes:

1. P es un ideal primitivo.
2. El centro del anillo de fracciones $Q(A/P)$ es una extensión algebraica de K .
3. P es un G -ideal; esto es, la intersección de los ideales primos que contienen estrictamente a P no es P .

28. MEDIDA E INTEGRACIÓN**01-28-4 T****Título:** Una introducción a la teoría de integración de funciones con los valores en espacios de Banach**Autor:** Elkin Darío Cárdenas Díaz**Director:** Jorge Mejía Laverde**Institución:** Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín**Fecha de aprobación:** Septiembre 2001

Resumen: Muchos problemas en ecuaciones diferenciales de evolución, pueden ser escritos en forma de problemas de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach, en los cuales la solución es un punto fijo de cierto operador que contiene una integral de Bochner. En el presente trabajo se construye la integral de Bochner, partiendo de la integral para funciones simples, hasta caracterizar de manera precisa la clase de las funciones de Bochner integrales cuando el espacio de Banach es separable. Una vez construida la integral de Bochner se describen sus principales propiedades, en particular, las relacionadas con los procesos de paso al límite bajo el signo integral (Teorema de convergencia dominada y lema de Fatou) y las relacionadas con el cálculo de la integral en espacios productos mediante integrales iteradas (generalización del Teorema de Fubini)

28. MEDIDA E INTEGRACIÓN**01-28-5 T****Título:** Teorema de la divergencia para campos de variación acotada en \mathbb{R}^2 **Autor:** Eliecer G. Campo V.**Director:** Pedro Isaza**Institución:** Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín**Fecha de aprobación:** Septiembre 2001

Resumen: El teorema fundamental del cálculo en su versión más clásica establece que si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable entonces $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. Usando la teoría de la medida, la hipótesis de diferenciable para F puede ser debilitada de tal modo que si F es una función de variación acotada y continua en a y b , entonces existe una medida μ tal que $\mu([a, b]) = F(b) - F(a)$. En caso de que F sea absolutamente continua, entonces $\mu([a, b])$ se puede escribir en la forma $\int_a^b F'(x)dx$.

En dimensiones mayores que 1 el teorema fundamental toma la forma del teorema de la divergencia, que afirma que $F = (F_1, \dots, F_n)$ es un campo vectorial continuamente diferenciable en \mathbb{R}^n y Ω es un abierto con frontera $\partial\Omega$ es igual a la integral del divergente de F , $\nabla \cdot F$, en Ω . Esto es :

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \vec{ds} = \int_{\Omega} \nabla \cdot F dv$$

En muchas aplicaciones físicas como la de un campo eléctrico producido por cargas puntuales, el campo no es una función C^1 definida en todo el espacio.

El propósito de este trabajo es demostrar una versión del teorema de la divergencia (teorema 2.4) y su corolario, análogo al resultado unidimensional arriba descrito para un campo F de variación acotada.

Se usa el Teorema de Representación de Riesz para asociar al campo una medida μ y por simplicidad consideramos sólo el caso en que la región Ω es un rectángulo de \mathbb{R}^2 .

35. ECUACIONES DIF. EN DERIVADAS PARCIALES

01-35-21 T

Título: Problema de Cauchy para la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) en espacios de baja regularidad

Autor: Juan Carlos Cordero Ceballos

Director: Pedro Isaza J. y Jorge Mejía L.

Institución: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Fecha de aprobación: Diciembre 2001

Resumen: En este trabajo se demuestra que el problema de Cauchy para la ecuación de Korteweg-de Vries está localmente bien propuesto para datos iniciales u_0 en el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, siempre que $s > -\frac{3}{4}$. Es decir, se prueba que dicho problema tiene solución local en el tiempo, ésta es única y depende continuamente del dato inicial u_0 . Este resultado fue obtenido por Kenig, Ponce y Vega en [Ke-Po-Ve2], y aquí se presenta una demostración más simplificada, en la que la solución se obtiene considerando una modificación adecuada del operador integral asociado al problema.

35. ECUACIONES DIF. EN DERIVADAS PARCIALES

01-35-22 T

Título: El Teorema del paso de la montaña: Aplicación y Generalización

Autor: Carlos Augusto Vélez López

Director: Jorge Cossio B.

Institución: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Fecha de aprobación: Diciembre 2001

Resumen: En este trabajo se estudia el Teorema del paso de la montaña. En el capítulo I se usa dicho teorema para probar la existencia de soluciones clásicas de un signo de un problema de Dirichlet sublineal. En el capítulo II se estudia una generalización del teorema del paso de la montaña que, además de garantizar la existencia de puntos críticos de minimax de funcionales definidos en espacios de Banach, caracteriza el comportamiento del funcional alrededor de dichos puntos.

35. ECUACIONES DIF. EN DERIVADAS PARCIALES**01-35-23 T****Título:** El Teorema de Lax-Milgram y aplicaciones a ecuaciones diferenciales**Autor:** Alex Manuel Montes Padilla**Director:** Jorge Cossio B.**Institución:** Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín**Fecha de aprobación:** Septiembre 2001

Resumen: En este trabajo se muestra cómo se pueden usar resultados abstractos del análisis funcional en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Inicialmente se estudian los teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram, los cuales constituyen una herramienta útil y sencilla para resolver ecuaciones diferenciales. Posteriormente se estudian los espacios de Sobolev, esenciales para establecer el concepto de solución débil de una ecuación diferencial. Y finalmente se consideran algunas aplicaciones de los teoremas mencionados a ecuaciones diferenciales. Se estudia el problema de Dirichlet en dimensión $n = 1$ (homogéneo, no homogéneo, con condiciones mixtas, etc) y el problema de Sturm-Liouville.

46. ANÁLISIS FUNCIONAL**03-46-6 T****Título:** Una clase de funciones convexas acotadas**Autor:** Lorena Patricia Cruz Mercado**Director:** Diego Mejía Duque**Institución:** Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín**Fecha de aprobación:** Marzo 2003

Resumen: En este trabajo se inicia la investigación de una nueva clase de funciones univalentes convexas acotadas. Esta clase resulta de extender al caso hiperbólico una caracterización de las funciones univalentes esféricamente convexas obtenidas por D. Mejía y Ch. Pommerenke. Específicamente, definimos de la clase \mathfrak{S} de funciones conformes $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, normalizadas con $f(0) = 0$, y con la propiedad de que las funciones $g_w(z) = f(z)/(1 - \bar{w}f(z))$ son euclidianamente convexas para todo $w \in \overline{f(D)}$. Se obtuvieron caracterizaciones analíticas y geométricas así como algunos teoremas de crecimiento y distorsión para estas funciones. Adicionalmente, se demuestra que la clase de funciones univalentes h - k -convexas con $k \geq 2$ está contenida propiamente en dicha clase y $k = 2$ es el mínimo valor de k para el cual esta afirmación es cierta.

46. ANÁLISIS FUNCIONAL**03-46-7 A****Título:** Local techniques in the study of operators and tensor norms defined by

sequence space

Investigador(es): P. Gómez Palacio, J. A. López Molina y M. J. Rivera

Institución: Universidad EAFIT (Colombia) y Universidad Politécnica de Valencia, (España)

Resumen: En este artículo caracterizamos los ideales de operadores minimal y maximal asociados a una amplia clase de norma tensorial obtenidas a partir de un espacio de Banach de sucesiones. Nuestros resultados son extensiones de los resultados clásicos acerca de las normas tensoriales de Saphar, una idea iniciada muchos años atrás por De Grande-De Kimpe y Harksen. Sin embargo, hasta ahora esta idea no ha ido más allá de un simple, aunque general, ejemplo de normas tensoriales. Probablemente esto es debido a que el estudio de operadores relacionados naturalmente con normas tensoriales clásicas es dominado por las propiedades especiales de los espacios $L_p(\mu)$ y en consecuencia la parte crucial de la solución del problema queda escondida en estas propiedades. El interés principal de éste artículo es descubrir el papel clave que juega la estructura local de los espacios involucrados en ésta clase de problemas generales.

65. ANÁLISIS NUMÉRICO

01-65-4 T

Título: Métodos iterativos basados en subespacio de Krylov

Autor: Ramiro Miguel Acevedo M.

Director: Carlos Enrique Mejía S.

Institución: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Fecha de aprobación: Julio 2001

Resumen: En este trabajo nos acercamos a la computación científica por medio de la consideración de los siguientes aspectos: Obtención de sistemas lineales por la discretización de ecuaciones diferenciales, enunciado general de métodos de Krylov y consideración de dos de estos métodos para la solución de ecuaciones lineales. Los dos métodos de Krylov elegidos sirven para la solución del problema $Ax = b$. El primero, Gradiente Conjugado, se usa cuando A es simétrica definida positiva (sdp) y el segundo, GMRES (Generalized Minimum Residual), se usa cuando no se sabe si A es sdp.

68. CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

01-68-3 T

Título: Algoritmos evolutivos y una aplicación en álgebra

Autor: Julio César Morales Cuervo

Director: Juan Diego Vélez Caicedo

Institución: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín

Fecha de aprobación: Diciembre 2001

Resumen: Se presenta un bosquejo de los métodos y procedimientos propios de la teoría general de los algoritmos genéticos, se explican las principales ideas empleadas hasta ahora para resolver el cubo de Rubik, y se aplican estrategias evolutivas para encontrar jugadas que permitan llevar el cubo de Rubik desde cualquier posición arbitraria hasta la posición inicial, también llamada posición fundamental. El algoritmo para resolver el cubo de Rubik está programado en DFW5 (Derive for windows).

90. INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

01-69-2 T

Título: Series de tiempo no lineales

Autor: Fredy Ocaris Pérez Ramírez

Director: Hermilson Velásquez Ceballos

Institución: Universidad Eafit, Medellín

Fecha de aprobación: 2001

Resumen: En este trabajo se estudian los modelos de heteroscedasticidad condicional autorregresiva, como son los modelos ARCH y GARCH. Además, se dan las propiedades estadísticas de estos modelos. También se estudian los modelos TAR Y SETAR y sus propiedades básicas. La atención se concentra sobre modelos que implican solamente dos regímenes. El modelo TAR asume que el régimen que ocurre en un tiempo t puede ser determinado por una variable umbral observable, para un valor de la variable umbral, el cual se denota como c . Un caso especial surge cuando la variable umbral se toma como un valor rezagado de su misma serie de tiempo, es decir, para un cierto entero $d > 0$. Como en este caso, el régimen es determinado por su misma serie de tiempo, el modelo que resulta se llama un modelo SETAR. El modelo SETAR de dos regímenes es de la forma $y_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}y_{t-1})(1 - I[y_{t-1} > c]) + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}y_{t-1})I[y_{t-1} > c] + \varepsilon_t$ donde $I(A)$ es una función indicadora con $I(A) = 1$ si el evento A ocurre y $I(A) = 0$ en cualquier otro caso. En la práctica, la variable umbral no se conoce, y una pregunta importante es cómo determinarla. Dicha pregunta se responde en nuestro trabajo.

PROBLEMAS Y SOLUCIONES

En esta sección se publican problemas propuestos por los lectores de la revista. Cuando las soluciones sean conocidas se solicita que sean enviadas junto con los problemas. Las soluciones serán, en su momento, objeto de publicación. Pueden remitir sus problemas a la dirección de la Revista por cualquiera de las vías disponibles o directamente al profesor Yu Takeuchi, editor de la sección a la Carrera 30, No. 39–31, Apto. 203, Bogotá, Colombia.

Problema 5.98 Vol. VII, No. 1, Mayo (1998). Propuesto por Yu Takeuchi. Demostrar que:

- i) Existen dos valores de $a > 0$ que satisfacen la igualdad

$$(a^a)^a = a^{(a^a)}.$$

- ii) Dado $a > 0$, existen a lo más dos valores de $b > 0$ que satisfacen la igualdad

$$a^b = b^a$$

Como solución a la parte ii) de este problema hemos recibido la siguiente nota.

Existencia de raíces no triviales de la ecuación

$$x^y - y^x = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^+$$

Pedro Ortega Palencia Héctor Cabarcas Urriola

En esta nota se establecen condiciones para la existencia de soluciones reales positivas no triviales x, y ($x \neq y$) de la ecuación $x^y - y^x = 0$. Además se demuestra la existencia y unicidad de soluciones enteras positivas para la correspondiente ecuación diofántica. Adicionalmente se da un criterio que permite establecer la relación de orden que surge entre las potencias de dos números reales positivos que no conmutan bajo exponenciación. Las herramientas utilizadas son algunos métodos del cálculo elemental y de la teoría de números elemental.

Soluciones reales positivas. Considérese la ecuación

$$x^y - y^x = 0, \quad x \neq y \quad (4)$$

o, en forma equivalente,

$$x^{\frac{1}{x}} - y^{\frac{1}{y}} = 0, \quad x \neq y \quad (5)$$

La segunda forma sugiere introducir la función $f : (0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Esta función es derivable en $(0, +\infty)$ y para todo x en dicho intervalo se tiene

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} (1 - \ln x) \quad (6)$$

De (6) se deduce lo siguiente:

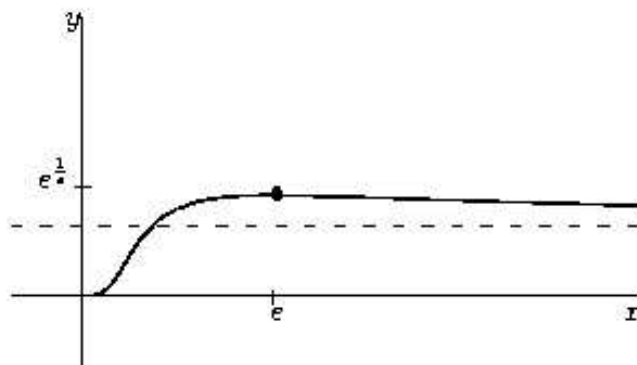
- i) El único punto crítico de f es $x = e$.
- ii) $f' > 0$ en $(0, e)$, luego f es estrictamente creciente en este intervalo.
- iii) $f' < 0$ en $(e, +\infty)$ luego f es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

Por el criterio de la primera derivada, $x = e$ es un máximo absoluto de f , es decir, $e^{\frac{1}{e}} > x^{\frac{1}{x}}$ para todo $x > 0$, $x \neq e$.

De otro lado

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

Con la información anterior se puede bosquejar la gráfica de f



Sea $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq e$. Puede ocurrir:

- a) $0 < a \leq 1$. Entonces $0 < a^{\frac{1}{a}} \leq 1$ y f alcanza el valor $a^{\frac{1}{a}}$ una sola vez. Esto es, $f(x) = a^{\frac{1}{a}}$ solo para $x = a$.
- b) $1 < a < e$. Entonces $1 < a^{\frac{1}{a}} < e^{\frac{1}{e}}$. Como f es estrictamente creciente en $(1, e)$, el único x en $(1, e)$ tal que $f(x) = a^{1/a}$ es $x = a$. De otro lado $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, $f(+\infty) = 1$ y $1 < a^{\frac{1}{a}} < e^{\frac{1}{e}}$. Entonces por el teorema del valor intermedio existe b en $(0, +\infty)$ tal que $f(b) = a^{\frac{1}{a}}$. Por ser f estrictamente decreciente en $(e, +\infty)$ este b es único. Es decir, existe un único $b \neq a$ tal que $b^{\frac{1}{b}} = a^{\frac{1}{a}}$.
- c) $a > e$. Nuevamente $f(+\infty) = 1 < a^{\frac{1}{a}} < e^{\frac{1}{e}} = f(e)$. Un razonamiento análogo prueba que f toma el valor $a^{\frac{1}{a}}$ una única vez en $(1, e)$ y una única vez en $(e, +\infty)$.

Todo lo anterior se puede resumir en:

Proposición 1. Si $a > 1$, $a \neq e$ existe un único real $b \neq a$ tal que $a^b = b^a$.¹

Proposición 2. i) Si $0 < a < b < e$ entonces $a^b < b^a$. ii) Si $e < a < b$ entonces $a^b > b^a$.

Queda una cuestión aún por resolver: si $1 < a < e < b$, ¿cómo es a^b con respecto a b^a ?

Para responder esta pregunta se procede como sigue.

Se busca el único $x > e$ tal que $a^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{1}{x}}$. Ahora si $x < b$ entonces $x^{\frac{1}{x}} > b^{\frac{1}{b}}$ y por tanto $a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$, de donde $a^b > b^a$. Si $x > b$ entonces $b^{\frac{1}{b}} > x^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{a}}$ de donde $b^a > a^b$.

Si $a > 1$, $a \neq e$, existe un único $b > 1$ tal que $a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}}$ y $a \neq b$. Obsérvese que $0 < \frac{1}{a} < 1$ y $0 < \frac{1}{b} < 1$, luego $\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{b^{\frac{1}{b}}}$, entonces $(\frac{1}{a})^{\frac{1}{a}} = (\frac{1}{b})^{\frac{1}{b}}$. Esto se resume en la siguiente proposición.

Proposición 3. Si $0 < x < 1$, $x \neq \frac{1}{e}$ existe un único y , $0 < y < 1$ tal que $x^x = y^y$, $x \neq y$.

Soluciones enteras positivas Si se restringen los valores de x e y al conjunto \mathbb{Z}^+ de los enteros positivos se obtiene la ecuación diofántica

$$m^n - n^m = 0 \quad (7)$$

Si m, n son tales que $0 < m < n < e$ por la proposición(1) $m^n < n^m$. De otro lado, si $e < m < n$ entonces $m^n > n^m$. Luego si (7) tiene solución

¹Problema propuesto por Yu Takeuchi en la revista Matemática: Enseñanza Universitaria, Vol. VII No. 1, Mayo de 1998.

debe tenerse $o < m < e < n$. Pero esto implica que $m = 1$ ó $m = 2$. Un cálculo sencillo prueba que $m \neq 1$, de donde $m = 2$. Sustituyendo en (7) resulta

$$n^2 = 2^n, \quad n > 2, \quad (8)$$

Lo que implica que el único factor primo de n es 2, y $n = 2^k$ con $k > 1$. Luego $(2^k)^2 = 2^{2k}$ lo cual conduce a $2^k = 2k, k > 1$. Pero $2^k > 2k$ para $k > 2$ y de esto $1 < k < 3$, es decir $k = 2$ y por tanto, $n = 4$.

Hasta ahora se ha encontrado una pareja solución en \mathbb{Z}^+ , $m = 2$ y $n = 4$. La unicidad de m está implícita en el argumento anterior y la unicidad de n se sigue de la unicidad de k .

Referencias

- [1] T. M. Apostol. *Calculus*. Vol I, Editorial Reverté S.A, 1998.
- [2] T. M. Apostol. *Introducción a la Teoría Analítica de Números*. Editorial Reverté S.A, Barcelona, 1980.
- [3] Garrett Birkhoff y Saunders MacLane. *Algebra Moderna*. Editorial Vicens-Vives, Barcelona, 1963.
- [4] Richard Courant y Fritz John. *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*. Vol.I, Editorial Limusa-Wiley S.A, México, 1971.
- [5] K. Chandrasekharan. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, New York inc, 1968.
- [6] Carl Friedrich Gauss. *Disquisitiones Arithmeticae*. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Santa fé de Bogotá, D.C, 1995.
- [7] Serge Lang. *Introducción al Análisis Matemático*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1990.
- [8] Serge Lang. *Cálculo I*. Fondo Educativo Interamericano, S.A, 1976.
- [9] *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*. Vol VII, mayo de 1998, sección de Problemas propuestos.
- [10] James Shokley. *Introduction to Number Theory*. Holt. Rinehart and Winston, inc, 1967.

Dirección del autor: Pedro Ortega Palencia. pedrootegaco@yahoo.com — Héctor Cabarcas Urriola. hecjo10@hotmail.com

Internacionales

Centenario del Nacimiento de Kolmogorov

Para conmemorar el centenario del nacimiento del gran matemático soviético Andrei Nicoláievich Kolmogorov (abril 25, 1903–octubre 20, 1987), quien fué uno de los más grandes creadores matemáticos del siglo XX y de todos los tiempos, la Academia de Ciencias Rusa y la Universidad Estatal Lomonosov de Moscú organizaron en Moscú la conferencia internacional *Kolmogorov y la matemática contemporánea*, realizada entre el 16 y el 21 de junio de 2003. La conferencia reflejó la visión de Kolmogorov de la matemática y de la ciencia como una unidad, su interés universal, y sus aportes creativos en casi todos los campos de la matemática con excepción de la teoría de números: teoría de funciones y análisis funcional, geometría y topología, teoría de la probabilidad y estadística matemática, turbulencia e hidrodinámica, sistemas dinámicos y teoría ergódica, teoría del control óptimo, lógica matemática y teoría de la complejidad.

También en numerosos centros otros matemáticos y universidades de Rusia y de todo el mundo se han realizado conmemoraciones académicas del centenario de Kolmogorov a todo lo largo del año 2003.

Encuentro de sociedades matemáticas de países de expresión latina de Europa y América

Del 22 al 25 de septiembre de 2003 y bajo los auspicios de varias sociedades matemáticas españolas se realizó en Santiago de Compostela, España, un Encuentro de Sociedades Matemáticas Latinoamericanas y de países europeos de expresión latina (España, Portugal y Francia).

Asistieron representantes de sociedades de Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, España, Francia, México, Nicaragua, Paraguay, Perú, Portugal, Venezuela y la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA). Colombia estuvo representada por los profesores Carlos Montenegro de la Sociedad Colombiana de Matemáticas y por Gerardo Arango de la Escuela Regional de Matemáticas.

Como resultado del análisis del estado y la situación de la actividad matemática en los países de origen de los asistentes a la reunión, se puso en evidencia, por un lado, la existencia de rasgos comunes en los problemas que los afectan y, por otro lado, la necesidad de emprender acciones

comunes para superar estas dificultades. Los asistentes suscribieron un *Documento de Conclusiones del Encuentro de Sociedades Latinoamericanas de matemáticas*, en el cual se comprometieron al “desarrollo de las siguientes acciones de cooperación mutua:

1. Establecer mecanismos ágiles de difusión entre las distintas Sociedades, de información sobre convocatorias de ayudas becas, proyectos, cursos y otras actividades afines, así como favorecer el concurso en las mismas a los miembros de las citadas Sociedades.
2. Desarrollar materiales de divulgación matemática de utilización común y accesibles a través de la web y otros medios, así como impulsar el intercambio de las publicaciones de las sociedades participantes.
3. Promover la realización de bases de datos y bibliográficas, así como facilitar el acceso de las sociedades participantes a las ya existentes.
4. Estimular la colaboración entre los grupos de investigación matemática existentes en los diversos países aquí representados, así como la creación de nuevos grupos que contribuyan al desarrollo matemático de la región. En particular, en los Congresos patrocinados por las distintas Sociedades se establecerán sesiones de trabajo que favorezcan la interacción de estos investigadores.
5. Apoyar, instando a las instituciones pertinentes, el desarrollo de programas de intercambio en la formación de postgrado y en la investigación, que lleven a lograr un desarrollo más uniforme en toda la región.
6. Propiciar el establecimiento de mecanismos que faciliten la participación activa, en su nación de origen, en la docencia y en la constitución de grupos de investigación, de los investigadores que hayan realizado un periodo de formación en el extranjero o estén desarrollando su carrera en el exterior,
7. Promover la firma de convenios entre los distintos países, así como la activación de los ya existentes, para favorecer la movilidad postdoctoral de los investigadores.
8. Analizar conjuntamente el modelo de intercambio de estudiantes y profesores universitarios y de enseñanza secundaria o media actualmente en vigor en la Unión Europea, con vistas a su posible

adaptación y extensión, en el caso de las matemáticas, al ámbito latinoamericano.

9. Estudiar el establecimiento de niveles comunes de referencia, estándares curriculares e indicadores de calidad en todos los ámbitos de la enseñanza universitaria y no universitaria en matemáticas.
10. Fomentar la cooperación en el desarrollo de actividades para la formación del profesorado de matemáticas en los distintos niveles de enseñanza,
11. Apoyar el desarrollo de actividades extracurriculares para estimular el estudio de las matemáticas tales como las Olimpiadas Matemáticas, Escuelas Regionales y otras actividades.
12. Impulsar la creación de Sociedades de Matemáticas en aquellos países de la región en los que no existan.
13. Constituirse como promotores de una *Red de Organizaciones Latinoamericanas de Matemáticas* (ROLMa), invitando a todas las Sociedades del área a adherirse a dicha Red, en los términos que se establezcan.”

Para difundir y desarrollar estas conclusiones se acordó crear un *Secretariado de Coordinación* formado por los presidentes de la Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, la Sociedad Matemática Costarricense, la Real Sociedad Matemática Española, que actuará como coordinadora del grupo, la Unión Matemática Argentina, y la Unión Matemática de América Latina y el Caribe.

También se constituyen tres comisiones específicas que elaborarán propuestas concretas antes de 1 de enero de 2004: una Comisión de Posgrado e Investigación coordinada por la Sociedad Matemática Mexicana, una comisión de Educación y Divulgación coordinada por la Sociedade Brasileira de Matemática, y una Comisión de Información coordinada por la Societat Catalana de Matematiques.

Nacionales

Grupos de investigación científica y tecnológica e innovación reconocidos por Colciencias en el año 2002

En la convocatoria para *Grupos de investigación científica y tecnológica e innovación del año 2002*, Colciencias reconoció seis grupos en el área

de Matemáticas y cuatro en el área de Probabilidad y Estadística. Los grupos en matemáticas son:

- El grupo de análisis funcional y análisis funcional numérico de la Universidad EAFIT de Medellín, dirigido por Gerardo I. Arango y Gabriel I. Loaiza.
- El grupo de lógica y computabilidad de la Universidad EAFIT de Medellín, dirigido por Andrés Sicard y Manuel H. Sierra.
- El grupo de teoría de representaciones y teoría de nudos de la Universidad Nacional de Colombia de Bogotá, dirigido por Ruth S. Huérfano y Mikhail Khovanov.
- El grupo de teoría de números, álgebra, geometría computacional y educación de las Universidades del Cauca y de Antioquia, dirigido por Carlos Trujillo (U. del Cauca) y Gilberto García (U. de Antioquia).
- El grupo de investigación matemática de la Universidad Industrial de Santander, dirigido por Marlio Paredes y Henry Lamos.

Los grupos de Probabilidad y Estadística son:

- El grupo de análisis multivariado de datos, bioestadística, estadística industrial y modelación estadística de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, dirigido por Sergio Yañéz y Francisco J. Díaz.
- El grupo de aplicación de la estadística al manejo y producción de cultivos de la Universidad Nacional de Medellín, dirigido por Daniel F. Jaramillo.
- El grupo de estadística en ciencias sociales y modelos para información autocorrelacionada en el tiempo y el espacio de la Universidad del Quindío, dirigido por Luis H. Hurtado y Gladys E. Salcedo.
- El grupo de análisis multivariado, computación, funciones especiales, prueba de hipótesis y estimación y teoría de las distribuciones de la universidad de Antioquia, dirigido por Daya Krishna Nagar.

Obituarios

Jairo Charris Castañeda (Cienaga 1939 – Bogotá 2003)

Escrito por Clara Helena Sanchez, Universidad Nacional, Bogotá.

Con mucho pesar recibió la comunidad matemática colombiana la noticia de la muerte del profesor Jairo Charris el pasado 17 de julio en la ciudad de Bogotá. Sus exequias se realizaron en la Iglesia de San Alfonso María Liborio y sus cenizas reposan en la Iglesia de Nuestra Señora de la Soledad, donde contrajo matrimonio con su esposa María Victoria Castañeda. A pesar de ser época de vacaciones sus honras fúnebres estuvieron muy concurridas por sus colegas de la Universidad Nacional, de la Universidad Sergio Arboleda y de la Academia Colombiana de Ciencias. Naturalmente también se encontraban sus familiares y amigos más cercanos. Los que estábamos ausentes recibimos vía correo electrónico la lamentable noticia y de corazón acompañamos a su esposa e hijas en ocasión tan triste.

Tuve el honor de abrir las páginas de Matemáticas: Enseñanza Universitaria, en su segunda etapa, con una entrevista que le hice a Jairo Charris al ser galardonado con el Premio Sociedad Colombiana de Matemáticas que ésta asociación le otorgó en 1990. Por ello me remito a ella para conocer una semblanza de su vida y obra. Allí se relata cómo por invitación de su gran amigo Víctor Albis decidió dedicarse a las matemáticas luego de haber culminado sus estudios, aunque nunca se graduó, de ingeniero químico. Jairo obtuvo su título de matemático en 1967; se había vinculado cinco años al Departamento de Matemáticas, como instructor. Fue uno de los pocos profesores de la de las primeras generaciones de matemáticos que dejó escuela. Sus investigaciones sobre polinomios ortogonales le valieron el reconocimiento internacional y atrajeron un buen número de estudiantes de pregrado y posgrado que trabajaron con él. Jairo, generoso sin medida en sus conocimientos, compartió con ellos en cursos, seminarios y tutorías, sus conocimientos sobre matemáticas, y sobre música y literatura, otras de sus aficiones. Nos deja un legado de 34 publicaciones, entre libros y artículos, varios de éstos realizados en compañía de sus alumnos. Pero sobretodo nos deja el ejemplo de ser un hombre íntegro dedicado a su profesión, y un ser humano como pocos.

Nos dejó Jairo, luego de una larga y penosa enfermedad que el cigarrillo, compañero inseparable por años, le trajo como consecuencia. Afortunadamente Jairo recibió, en vida, el afecto de sus compañeros, alumnos, familiares y amigos. También recibió algunas distinciones como reconocimiento a su trabajo como son el Premio Nacional de Matemáticas

(1990), Premio a la Vida y Obra de un Científico que otorga la Academia Colombiana de Ciencias (1991), los títulos de Profesor Emérito (1989), y Profesor Honorario (1999) de la Universidad Nacional, y su nombramiento como miembro de Número de la Academia Colombiana de Ciencias en 2002. Los días 5 y 6 de agosto se realizó en la Universidad Nacional un homenaje a su memoria, convocado por los departamentos de Matemáticas de las universidades Nacional, Andes y Sergio Arboleda, la Academia de Ciencias y la Sociedad Colombiana de Matemáticas.

Con el nombre de Festival Charris se convocó a la comunidad matemática colombiana a exaltar su memoria. Los organizadores del evento, con Víctor Albis a la cabeza, esperaban que a pesar de su delicada salud, Jairo pudiera estar presente en el evento. Pero su precaria salud no le alcanzó para llegar a la cita y escuchar el sentido afecto que sus colegas y amigos querían ofrendarle. Matemáticos de Cali, Medellín, Bucaramanga, México y los Estados Unidos vinieron a expresar por medio de una charla en su memoria, sus sentimientos de respeto y admiración al compañero, al amigo. Su esposa María Victoria y sus hijas Marcela y Ana María recibieron en su nombre el merecido homenaje. El Festival terminó con un concierto ofrecido por Karol Bermudez, en el cual tocó la sonata para piano la Pasionata de Beethoven, una de las piezas preferidas de Jairo. De esta manera las matemáticas y la música que han estado entrelazadas desde los pitagóricos, y que tan entrañables fueron para el profesor Charris estuvieron presentes en ese sentido y merecido homenaje a su memoria. Los invito a entrar a la página web de la Academia Colombiana de Ciencias: www-accefyn.org.co en la cual podrán encontrar, una semblanza de la vida de Jairo, hecha por uno de sus más entrañables amigos como lo fue Jaime Lesmes, su curriculum vitae, el cual contiene el listado de sus publicaciones, y las conferencias que en su honor se realizaron en el Festival Charris.

H.S.M. Coxeter, un geómetra que cultivó las matemáticas como un arte (1907-2003)

El geómetra inglés Harold Scott MacDonal Coxeter, llamado Donald por quienes lo conocían y conocido entre la comunidad matemática como H.S.M. Coxeter, falleció el 31 de mayo de 2003 en Toronto, Canadá, a la edad de 96 años. Había nacido en Londres, Inglaterra, el 9 de febrero de 1907.

Coxeter fué educado en la Universidad de Cambridge. Allí recibió un B.A. en 1929 y, bajo la dirección de H.F. Baker, obtuvo el doctorado en 1931. Permaneció por un tiempo en Cambridge como becario

investigador, durante el cual fué a la Universidad de Princeton como investigador visitante en los años 1932-33 y 1934-35 para trabajar con Oswald Veblen.

En 1936 aceptó un nombramiento en la Universidad de Toronto, en el Canadá. Desde entonces permaneció como profesor en Toronto. El pasado año 2002 el departamento de matemáticas celebró sus 60 años de profesorado en esta Universidad.

El centro del trabajo de Coxeter fué la geometría. Realizó aportes de gran importancia en la teoría de politopos, en geometría no-euclidiana, en teoría de grupos y en teoría combinatoria. Los politopos de Coxeter son los dominios fundamentales de los grupos de reflexiones discretas, conocidos hoy como grupos de Coxeter. En 1934, Coxeter clasificó todos los grupos de Coxeter esféricos y euclidianos.

Coxeter se interesó profundamente por el arte. Antes de hacerse matemático quiso ser compositor, pero su interés por la simetría lo condujo hacia la matemática y a una carrera científica que amó con pasión.

(Esta nota es una adaptación del artículo sobre Coxeter escrito por J.J. O'Connor y E.F. Robertson para la página web Mac Tutor, University of St. Andrews, Scotland - <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Coxeter.html>)

Nacionales

Cita de enero de 2004 en ecuaciones diferenciales (Cali, enero 19 a 23 de 2004)

En la semana del 19 al 23 de enero de 2003 se llevará a cabo en el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle en Cali *Cita de enero en ecuaciones diferenciales*. En este evento, que cuenta con la financiación de la ERM, se presentarán conferencias y cursillos sobre las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.

El Comité Académico de la reunión está constituido por los doctores Luz Myriam Echeverry (Uniandes), Jorge Mejía (U.N. Medellín) y Raúl Quintero (Univalle). El Coordinador Operativo es el Dr. Jaime Arango (Univalle).

Se contará con la presencia de destacados matemáticos colombianos y extranjeros como asistentes y como conferencistas. En particular, se anuncian estos cursillos: Dr. Felipe Linares, IMPA, *Existencia global de soluciones para la ecuación generalizada de Korteweg-de Vries*; Dr. André Nachbin, IMPA, *Métodos matemáticos en mecánica de fluidos*; Dr. Aureli Alabert, UAB, *Ecuaciones estocásticas*.

X Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas (Medellín, del 12 al 16 de julio de 2004)

La Universidad de Medellín será anfitriona del X Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas durante los días 12, 14, 15 y 16 de julio del año 2004.

El Comité Organizador está formado por los profesores Gerardo Arango (Presidente de la ERM), José Alberto Rúa (Coordinador General del evento), Alba Luz Muñoz (Directora Académica de la U. de Medellín), Carlos Tulio Montoya (Director de Extensión, U de Medellín) y Marta Cecilia Meza (Decana Facultad de Ingeniería de Sistemas, U. de Medellín).

Como en los nueve eventos anteriores, los objetivos del X Encuentro son:

- Divulgar el trabajo matemático que se realiza en la región de influencia de la ERM.
- Presentar los trabajos de los diferentes grupos de investigación de la ERM.
- Proporcionar espacios de encuentro, dialogo y actualización para profesores y estudiantes de matemáticas de los distintos niveles educativos.

Los interesados en participar como conferencistas o ponentes deberán enviar el título del trabajo, una reseña y descripción de recursos didácticos si los requieren. Pueden comunicarse al correo electrónico.

erm_verano@guayacan.udem.edu.co.

Algunos eventos realizados en el 2003

Festival Charris (Bogotá, 5 y 6 de agosto 2003)

La Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, la Sociedad Colombiana de Matemáticas y las Universidades de los Andes, Nacional de Colombia y Sergio Arboleda organizaron un Festival Académico dedicado al profesor Jairo Charris Castañeda los días 5 y 6 de agosto de 2003 con el fin de hacer un reconocimiento a la labor científica fecunda y ejemplar del profesor Charris en beneficio de la matemática colombiana. Se realizó en el auditorio del Observatorio Astronómico Nacional, en la Ciudad Universitaria de la Universidad Nacional de Colombia, en Bogotá.

Entre los participantes en el festival se destacan: Pablo Acosta y Victor Samuel Albis (Universidad Nacional de Colombia), *Polinomios de permutación sobre álgebras modulares*; Primitivo B. Acosta Humánez (Universidad Sergio Arboleda, Bogota), *Teoremas de isomorfía en grupos diedros*; Xavier Caicedo (Universidad de los Andes, Bogota), *El teorema de Hahn-Banach como un principio de elección*; Alfonso Castro (University of Texas), *La influencia de Jairo Charris en la generación de los años 70 del siglo XX*; Jimmy corzo, Emilse Gómez y Raydonal Ospina (Universidad Nacionalde colombia), *Potencia de pruebas de rachas para alternativa de tendencia*; Jorge Ivan Cossio (Universidad Nacional de Colombia, Medellín); Stella Huérfano (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá); Jaime Lesmes (Universidad de los Andes, Bogotá), *Semblanza de Jairo Charris Castañeda*; Francisco Marcellan (Universidad Carlos Tercero, Madrid, España); Sergio Monsalve (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá), *Sobre el estado del arte en teoría de juegos*; Myriam Ortiz, *Sobre la educación matemática*; Germán Preciado (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá); Guillermo Restrepo (Universidad del Valle, Cali); Guillermo Rodríguez (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá); Rafael Rubio y Alfonso Rider (Universidad de Córdoba, España); Carlos Ruiz (Universidad Sergio Arboleda); Félix Soriano (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá); Débora Tejada (Universidad Nacional de Colombia, Medellín); Wilson Zuñiga (Barry University, Miami, EE.UU), *p-adic oscillatory integrals and polyhedra*.

El comité organizador de este evento estuvo conformado por los profesores Victor Manuel Albis Gonzáles (Academia Colombia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales), Carlos Montenegro (Universidad de los Andes, Sociedad Colombiana de Matemáticas) , Germán Preciado (Universidad Nacional de Colombia) y Reinaldo Núñez (Universidad Sergio Arboleda).

IX Encuentro de la ERM (Neiva, 15 a 19 de septiembre, 2003)

En la sede de la Universidad Surcolombiana en Neiva, y con la coordinación general del profesor Mario Montealegre (U. Surcolombiana) se realizó el IX Encuentro de la Escuela Regional de Matemáticas.

Se contó con la presencia del Dr. Carlos Montenegro (U. de los Andes, Presidente de la Sociedad Colombiana de Matemáticas) en la conferencia inaugural

Juegos matemáticos y del Dr. José Fernando Isaza (Presidente de MAZDA de Colombia) en la conferencia de clausura, *Formulación de problemas y conjeturas*.

En la clausura del encuentro se hizo un homenaje al profesor Yu Takeuchi, fundador de *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*.

La organización del encuentro estuvo a cargo de la Escuela Regional de Matemáticas, la Universidad Surcolombiana. Fué patrocinado por Comfamiliar del Huila, Grupo K-T-DRA Ltda., Texas Instruments, el Comité de Cafeteros del Huila y Gaseosas del Huila S.A.-Postobón.

XVI Encuentro Latinoamericano de Biomatemáticas y Escuela de Biología Matemática (Armenia, 24, a 28 de noviembre, 2003)

La Sociedad Latinoamericana de Biología Matemática, la Escuela Regional de Matemáticas y la Escuela de Investigación en Biomatemáticas, realizaron el XVI Encuentro Latinoamericano de Biomatemáticas, 2003, los días comprendidos entre el 24 y 28 de noviembre en la Universidad del Quindío, en Armenia.

En el congreso se trataron temas del área como *Contaminación ambiental*, en un curso dirigido por el Dr. Joao Meyer, de la Universidad de Campinas; *Conservación de sistemas ecológicos* (Ecología de poblaciones y ecotoxicología) en un curso dirigido por los doctores Fernando Momo y Graciela Canziani de Argentina; *Fisiología y neurociencias* en un curso dirigido por la Dra. Lucía Cervantes de la Universidad de Puebla, Mexico; *Tomografía* por el Dr. Andrés Fraguela de México y *Epidemiología y genética* por el Dr. Jorge Gonzalez de la Universidad Católica de Valparaíso en Chile.

Como preparación al congreso se realizaron tres cursos previos, durante la semana de 17 al 21 de noviembre: un curso en *Técnicas en modelamiento matemático* orientado por el Dr. Rodney Carlos Bassanezi, del Instituto de Matemáticas Estadística y Computación Científica, de la Universidad Estatal de Campinas, Brasil, donde se trataron temas como modelos continuos y discretos en biomatemáticas, método de Ford-Walford para estabilidad, evaluación de modelos en dinámicas de poblaciones, control biológico de plagas y modelo de epidemiología. Un curso de *Ecología matemática* orientado por el Dr. Momo de la Universidad de Luján en Argentina en el que se desarrollaron temas como razón de la ecología matemática, modelos de crecimiento poblacional, modelos continuos discretos, puntos de equilibrio y análisis de estabilidad; modelos para poblaciones estructuradas, modelos con dinámicas complejas, modelos de interacciones poblacionales, competencia, depredación mutualismo, modelos bioeconomicos clásicos, modelos simples de epidemiología, modelos para contaminación y ciclos de nutrientes. Por último, un curso de *Modelos no lineales* orientado por el aspirante a doctor en la Universidad de Puebla, Anibal Muñoz en el que se desarrolló el tema de bifurcaciones en \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 .

La revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* es un órgano de expresión del profesorado y de todos los interesados en el desarrollo matemático universitario. Haga conocer sus trabajos y sus puntos de vista enviando a la revista

- artículos
- notas de clase
- glosas sobre libros y artículos
- problemas y soluciones
- noticias, etc.

Envíelos a través de los corresponsales de *Matemáticas: Enseñanza Universitaria* o directamente a la siguiente dirección

Matemáticas: Enseñanza Universitaria
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Valle
Apartado Aéreo 25360,
Cali, Colombia.
Teléfonos: (2) 330-25-66 339-32-27
e-mail: revistaerm@univalle.edu.co
página web: <http://revistaerm.univalle.edu.co>



Informe a la comunidad académica sobre sus artículos y proyectos de investigación o sobre su tesis enviando un resumen a **Matemáticas: Enseñanza Universitaria**. Hágalo a través de algún corresponsal de la revista o envíe directamente sus resúmenes a: Apartado Aéreo 25360, tel-fax: (2) 3302566, e-mail: revistaerm@univalle.edu.co. Tome como modelo la siguiente forma.

RESUMENES DE ARTICULOS O PROYECTOS DE INVESTIGACION

TITULO: _____

Artículo Proyecto Tesis

Clasificación temática. Utilice la clasificación de la American Mathematical Society, si tiene manera de hacerlo.

INVESTIGADOR(ES):(nombres y dirección):_____

RESUMEN:

En el caso de tesis indique el nombre del Director de tesis y fecha de aprobación,
¿Puede Ud. enviar copias del artículo o documento a profesores interesados?

Si No

Corresponsales de la Revista

U. de Nariño	Alvaro Alfredo Bravo
U. del Cauca	Luis Eduardo Montoya
U. Tec. de Pereira	Carlos Arturo Mora
U. del Quindío	María Dolly García
U. de Antioquia	Armando Gomez Romero
U. Nacional, Manizales	Luis Alvaro Salazar
U. Nacional, Medellín	Fernando Puerta
U. Nacional, Bogotá	Clara Helena Sánchez
U. del Norte	Ismael Gutiérrez
U. Tec. de los Llanos	Yolanda Fonseca
U. de Sucre	Jesús Cepeda Coronado
U. Javeriana, Bogotá	Iván Castro Chadid
U. Javeriana, Cali	Oscar A. Montaña
U. Distrital	Carlos J. Arrieta
U. Santiago de Cali	Jairo Apráez
U. F. P. S.	Mawency Vergel Ortega
U. del Tolima	Pedro Gallego
U. de la Amazonía	Arnulfo Coronado
U. Surcolombiana	Mauro Montealegre
U. EAFIT	Pedro Vicente Esteban
U. Ind. de Santander	Marlio Paredes
U. de Cartagena	Sandra Gutiérrez
U. de Medellín	José Alberto Rua
U. de los Andes	Ricardo Arteaga
U. Tec. del Chocó	Américo Mosquera Murillo
Corp. U. Autónoma de Occ.	Oswaldo Rodríguez
U. del Valle	José Raul Quintero



Por el desarrollo de las Matemáticas
desde una perspectiva regional.

1 Editorial

Matemáticas

- 5 Método numérico para un modelo de ondas dispersivas**
Juan Carlos Muñoz
- 21 Los espacios de Hörmander $B_{p,k}(E)$**
Jairo Villegas G
- 33 Métricas conformes en superficies compactas con frontera**
Gonzalo García y Oscar Andrés Montaña
- 45 Injection and suction effects on three-dimensional unsteady flow and heat transfer between two parallel porous plates**
R.C. Chaudhary y Bhupendra Kumar Sharma
- 57 Normas tensoriales construidas mediante espacios de sucesiones de Banach**
Patricia Gómez Palacio, Juan Antonio López Molina y María José Rivera Ortún

Educación e Historia

- 73 El concepto de aproximación local: una propuesta metodológica a partir de la recta tangente**
Pedro Vicente Esteban Duarte y Pedro Pérez Carreras
- 91 El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos**
César Augusto Delgado G

General

- 129 Resúmenes de Artículos, Proyectos y Tesis**
- 135 Problemas y Soluciones**
- 139 Noticias y Eventos**